

MÉTODOS DE CONTAGEM: UMA VISÃO OLÍMPICA

Rafael Araujo de Souza¹

RESUMO

Apresenta-se, neste trabalho, o resultado de uma pesquisa do tipo bibliográfica sobre os métodos de contagem, buscando apresentar uma visão olímpica, por meio de uma série de problemas de olimpíadas de matemática, como a OBMEP, OBM e o Canguru de Matemática, mostrando como é possível ensinar esses métodos aplicando problemas olímpicos, despertando cada vez mais o interesse dos alunos por competições matemáticas, além também de tirar a ideia de que o que cai nas olimpíadas de matemática não é o que é visto em sala de aula. Este artigo está dividido em cinco partes: na primeira parte é apresentado uma pequena descrição sobre algumas competições de matemática. Na segunda, tem-se a apresentação do Princípio Fundamental da Contagem e aplicação do mesmo em problemas olímpicos, na terceira, é abordado as permutações (simples e com repetições) e aplicação do mesmo em problemas olímpicos e na quarta e quinta, respectivamente versa sobre arranjos e combinações, onde em ambos se aplica os conceitos discutidos em problemas olímpicos.

Palavras-chave: Métodos de Contagem. Olimpíadas. Matemática.

ABSTRACT

This paper presents the result of a bibliographic research on counting methods, seeking to present an Olympic vision, through a series of mathematical Olympiad problems, such as OBMEP, OBM and Mathematics Kangaroo. showing how it is possible to teach these methods by applying Olympic problems, increasingly arousing students' interest in mathematical competitions, and also getting the idea that what falls in the math Olympics is not what is seen in the classroom. This article is divided into five parts: The first part gives a short description of some math competitions. In the second, there is the presentation of the Fundamental Principle of Counting and its application in Olympic problems, in the third, the permutations (simple and repetitive)

¹ Professor da Secretaria de Estado da Educação do Piauí (SEDUC-PI), graduado em Matemática (UFPI), Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática (FAERPI) e em Matemática Financeira e Estatística (FAVENI). E - mail: rafaelmat13@gmail.com

and its application in Olympic problems are discussed, and in the fourth and fifth, respectively, about arrangements and combinations where both concepts discussed in Olympic problems apply

Keywords: Counting Methods. Olympics. Mathematics.

1. INTRODUÇÃO

A matemática é uma disciplina vista por muitos como chata e difícil, e se não houver uma maneira que atraia o aluno, ela continuará sendo vista assim. Por isso, constantemente é estudado por pesquisadores da educação matemática, metodologias de ensino, como jogos matemáticos, modelagem, situações problemas e etc. como maneiras de atrair o aluno e minimizar problemas de aprendizagem.

Uma metodologia bem interessante e que pode ser utilizada em sala de aula é a resolução de problemas, como diz Freitas et. al. (2014, p.3) “ Ao observarmos algumas das principais tendências atuais na área de Educação Matemática, constatamos que a resolução de problemas aparece frequentemente como “motor” de muitas propostas inovadoras.”, o que pode ser associado com problemas olímpicos, que são desafiadores aos alunos e faz com que eles fiquem intrigados a resolvê-los.

A cada ano que se passa nota-se que as competições de matemática vem ganhando cada vez mais espaço no cenário nacional e internacional, e sendo assim professores e alunos buscam cada vez mais se prepararem para obterem bons resultados, não é a toa que a OBMEP de olho em motivar cada vez mais os alunos e professores, além de preparar os alunos já medalhistas desenvolvem alguns projetos importantes, como O PIC e a OBMEP na escola.

Um dos conteúdos mais complicados para os alunos são os métodos de contagem, visto que esse tópico requer uma boa dose de criatividade, sem falar que sempre há a dúvida: “Quando somo e quando multiplico?” Em sala de aula, essa parte da matemática por um lado é esquecida e não é dada e por outro lado ela é deixada de lado simplesmente pelo fato do professor não ter afinidade e também não domina-la bem, o que é errado, pois os métodos de contagem estão presente constantemente em olimpíadas de matemática e o próprio enem.

Alguns professores ao ensinar métodos de contagem para seus alunos, acabam apresentado de forma rápida e simples, apenas exercícios e nem aplicam em problemas olímpico, o que torna, de fato as aulas “chatas” e não provocam seus alunos a pensar.

Frente a este contexto, o presente trabalho tem como intuito trazer a tona a importância da utilização de problemas olímpicos para o ensino dos métodos de contagem, além de mostrar que é possível preparar todo o curso de contagem em cima destas competições.

Com o propósito descrito acima, este trabalho foi organizado da seguinte maneira. A terceira seção é apresentado uma pequena descrição sobre algumas competições de matemática.

Na quarta seção apresenta-se o Princípio Fundamental da Contagem e uma série de problemas olímpicos, como exemplo de aplicação do PFC.

Na quinta seção versa sobre as permutações, simples e com elementos repetidos, e uma série de problemas olímpicos, como exemplo de aplicação.

Na sexta e sétima seção, respectivamente, tem-se os arranjos e as combinações simples, havendo uma série de problemas olímpicos, como exemplo de aplicação.

2. METODOLOGIA

2.1 Tipo de pesquisa

A pesquisa apresenta – se como bibliográfica, pois a mesma apresenta um levantamento bibliográfico do material já publicado sobre o assunto; nessa fase inclui-se também a pesquisa pura, com o objetivo de satisfazer uma necessidade pelo conhecimento.

Quanto aos objetivos apresenta-se como exploratória com abordagem metodológica, classificando-se como qualitativa em função da análise da teoria ser feita apenas a partir da discussão dos autores teóricos. Nesse sentido, tem o objetivo de mostrar a importância dos métodos de contagem para as olimpíadas de matemática, nacionais, estaduais e internacionais, visando despertar professores e alunos para o ensino desse tema, que é geralmente deixado de lado, devido o alto grau de interpretação de problemas.

2.2 Procedimento

No primeiro momento foi feita a escolha da temática, em seguida houve o levantamento do material bibliográfico para a construção do artigo. Após a análise do material, o estudo desenvolvido apresenta – se da seguinte forma: Será iniciado com uma pequena descrição sobre algumas olimpíadas de matemática, para em seguida, trabalhar os métodos de contagem, aplicando-os simultaneamente em problemas olímpicos.

3. OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

Atualmente os alunos apaixonados por matemática, especialmente em competições, possuem muitas oportunidades com a grande diversidade de competições, nacionais e internacionais. Faremos uma pequena listagem e descrição sobre algumas competições. Todas as informações aqui estão nas referências [2], [3], [4], [13] e [14].

Concurso Canguru de Matemática Brasil: É uma competição internacional que ocorre anualmente e é destinada a todos os alunos da educação básica (3º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio). É considerada a maior competição internacional do mundo, com uma média superior a 6 milhões de participantes anualmente, presente em 75 países.

Olimpíada Internacional Matemática sem Fronteiras: É a edição brasileira da competição francesa *Mathématiques Sans Frontière*, criada em 1989. A rede POC, em 2010, recebeu o convite para realizar esta competição no Brasil, na qual consiste em ser uma olimpíada de participação coletiva, voltada para a turma e não apenas para o aluno com mais destaque em matemática.

OBMEP: É uma competição de nível nacional, criada em 2005 com o objetivo de estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área. É um projeto nacional direcionado a princípio às escolas públicas, e atualmente também às escolas privadas brasileiras. A realização é de responsabilidade do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, sendo que é promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC. É um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do

Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

OPIM: Foi criada em 1998 e até o ano de 2013 aconteceram apenas 9 edições. A partir de 2018, na sua 10ª edição, a OPiM busca ter continuidade e ocorrer anualmente. Os objetivos da olimpíada piauiense de matemática, consiste em interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino de Matemática no Estado do Piauí, estimulando alunos e professores a um aprimoramento maior propiciado pela participação em olimpíadas; despertar nos alunos a curiosidade sobre a Matemática e a vontade de querer aprender e solucionar problemas matemáticos, além de descobrir jovens com talento e afinidade com Matemática colocando-o em contato com profissionais e projetos de pesquisa de alto nível, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira científica e tecnológica. Outro objetivo interessante da Opim é o fato de contribuir para a integração das escolas com a Universidade, institutos de pesquisa e sociedades científicas. Como também selecionar e treinar estudantes para representar o Piauí em competições nacionais e internacionais de Matemática; promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

OBM: É uma competição para estudantes da educação básica (fundamental maior e ensino médio) e do ensino superior de instituições públicas e privadas do Brasil.

É uma realização conjunta da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Sua coordenação está a cargo da comissão gestora e da comissão nacional de olimpíadas de matemática da SBM.

A partir de 2017 teve seu formato mudado, agora nos níveis 1, 2 e 3 estando integrada OBMEP, havendo apenas uma fase no segundo semestre com alunos convidados, mediante ótimos desempenhos na OBMEP e olimpíadas de matemática regionais apoiadas pela OBM. Já no nível universitário, a mudança está no fato da inscrição ser agora individual.

Dentre os objetivos da OBM, podemos citar alguns como selecionar os estudantes que representarão o Brasil e competições internacionais de matemática a partir do seu desempenho na OBM, realizando seu devido treinamento; apoiar as competições regionais de matemática em todo Brasil e organizar diversas competições

internacionais de matemática, quando realizadas no Brasil. Os demais objetivos são os mesmos da OPIM, mas com caráter nacional.

4. O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO)

Contar parece ser uma tarefa fácil, principalmente quando você enumera todos os casos e sai contando um por um, no entanto, muitos problemas não nos possibilita essa facilidade, necessitando assim de técnicas que facilite o processo de contagem. A seguir, vamos aprender uma técnica simples e prática, mas que é a base dos principais métodos de contagem, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Vale salientar que em todos os problemas olímpicos objetivos trabalhados neste artigo, terão suas alternativas omitidas, por serem desnecessárias. Todos os resultados aqui discutidos estão associados as referências [2], [3], [4], [8] e [9].

Exemplo 1. Uma porta só é aberta quando usamos simultaneamente a chave e o cartão corretos. Se você possui duas chaves e três cartões, quantos testes devemos fazer para garantir que a porta irá abrir?

Solução: Podemos apresentar todos os casos possíveis no diagrama abaixo

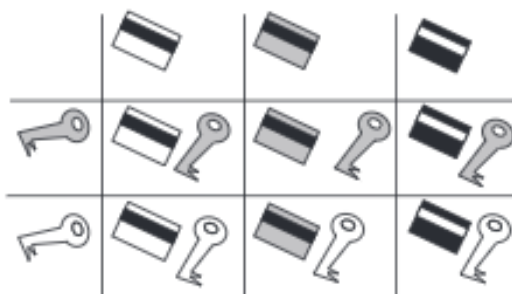


Figura 1: Abrindo uma porta (HOLANDA; CHAGAS, 2018)

Com o auxílio do diagrama acima, podemos chegar a uma solução visual e igual a 6, visto que, todas as combinações possíveis, de uma chave com um cartão, estão representadas no diagrama. No entanto, poderíamos ter resolvido o mesmo problema sem precisar apresentar todos os casos possíveis, da seguinte maneira:

Observe que a cada escolha de uma chave, teremos três possibilidades de escolha de um cartão, sendo assim, com duas chaves teremos um total de combinações de $2 \times 3 = 6$. Logo, seria necessário seis teste para encontrar a combinação correta.

O que podemos notar é que no fundo foi preciso tomar duas decisões, a saber, a primeira decisão (d_1) foi escolher uma chave e a segunda decisão (d_2) foi escolher um cartão, logo o número de decisões consistiu em apenas multiplicar as possibilidades de cada decisão $d_1 \times d_2 = 2 \times 3 = 6$.

Agora, tomando o mesmo problema, suponha que se tenha 20 chaves e 8 cartões. Não há mais necessidade de se construir o diagrama, visto que, seria bem exaustivo, logo temos as mesmas decisões a serem tomadas, d_1 e d_2 , portanto, seria necessário $d_1 \times d_2 = 20 \times 8 = 160$ testes para encontrar a combinação correta. O método no qual utilizamos é conhecido como Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo. A seguir o enunciaremos de uma forma generalizada e veremos a sua aplicação em vários problemas olímpicos.

Princípio Fundamental da Contagem (PFC): Se as decisões $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ puderem ser tomadas, respectivamente de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ maneiras e se $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ forem decisões independentes entre si, então o número de maneiras distintas de se tomar as n decisões simultaneamente, é dada pelo produto:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$$

A demonstração detalhada deste princípio pode ser encontrada em [8]. De mãos do PFC, vamos nos aventurar em alguns problemas olímpicos de várias competições nacionais e internacionais.

Problema Olímpico 1. (Canguru de Matemática – 2017) Júlia tem quatro lápis de cores diferentes e quer usar alguns ou todos eles para pintar o mapa de uma ilha com quatro países, como na figura. Os mapas de dois países com fronteiras comuns não podem ter a mesma cor. De quantas formas pode ser pintado o mapa da ilha?

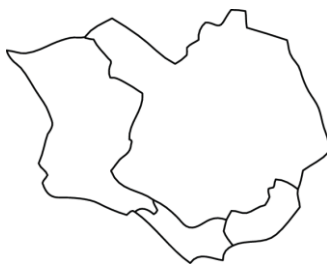


Figura 2: Mapa (CANGURU)

Solução: Vamos iniciar nomeando cada região do mapa, segundo a figura abaixo:

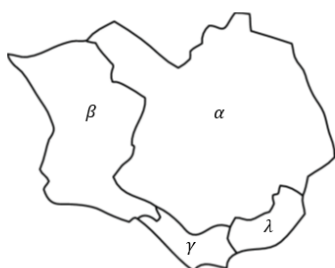


Figura 3: Mapa - Solução (CANGURU)

Note que a região α é a região com mais vizinhos, a saber, β, γ e λ , e as demais regiões, possuem apenas dois vizinhos cada. Sendo assim, nossa primeira decisão deve ser escolher a cor da região α , que pode ser escolhida de quatro maneiras. A seguir, podemos escolher a cor da região β , que pode ser escolhida de três maneiras, visto que, não pode ter a mesma cor de α . Para colorir a região γ que é vizinha de α e β , resta apenas duas escolhas, e por fim, a região λ também possui duas escolhas, já que é vizinha de γ e α , mas não de β . Portanto, usando o PFC temos $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

Veja que no problema acima, a escolha da cor da região α deveria ser tomada antes das demais, pelo fato dela ser a região com mais vizinhos, e depois as outras foram tomadas seguindo as restrições necessárias, como nos recomenda Morgado & et. al (1991,p.20) “Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar – se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar”.

Problema Olímpico 2. (OBMEP - 2016) Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

Solução: Como cada livro possui um código com três letras, podendo elas se repetirem, e o último livro tem o código DAB, então, nota – se que todos os códigos iniciados com as letras A,B e C foram usados, portanto, para cada uma das letras A,B ou C escolhida, tem – se mais 26 possibilidades para a próxima letra e depois mais 26 possibilidades para a terceira letra, logo tem – se um total de $3 \times 26 \times 26 = 2028$ livros. Agora vamos completar com os que iniciam com a letra D até chegar no último,

que no caso, são apenas mais dois, a saber, DAA e DAB. Sendo assim, na biblioteca há um total de $2028 + 2 = 2030$ livros.

Existem alguns problemas de contagem que não é possível resolver de forma direta, e neste caso, a melhor estratégia é dividir em casos. Vejamos o problema a seguir.

Problema Olímpico 3. (OBMEP 2014) Quantos números inteiros e positivos de cinco algarismos tem a propriedade de que o produto de seus algarismos é 1000?

Solução: Observe que $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Os possíveis números são formados pelos algarismos 2, 4, 5, 5, 5 ou 1, 8, 5, 5, 5. Vamos contar cada caso.

- i) 5, 5, 5, 2 e 4, caso em que contabilizamos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades; 5 possibilidades para a posição do algarismo 2 e 4 possibilidades para o algarismo 4 (as demais casas do número devem receber o algarismo 5);
- ii) 5, 5, 5, 8 e 1, caso em que, de forma análoga, contabilizamos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades.

Portanto, existem $20 + 20 = 40$ números com tal propriedade.

Problema Olímpico 4. (OBM - 2005) Em um tabuleiro quadrado 5×5 , serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo. De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do Tabuleiro?

Solução: Observe que se fixarmos o vértice oposto da hipotenusa do triângulo, os outros dois vértices devem estar obrigatoriamente um na mesma linha e o outro na mesma coluna do vértice fixado. Portanto, podemos escolher o vértice oposto a hipotenusa do triângulo de 25 maneiras. E cada um dos demais vértices, de quatro maneiras cada. Logo, pelo PFC, temos $25 \cdot 4 \cdot 4 = 400$ triângulos.

A seguir veremos outras técnicas de contagem.

5. PERMUTAÇÕES

Permutar, ou “trocar” nada mais é do que mudar a ordem dos objetos, e neste caso a permutação estuda como é feito essas mudanças, a saber, temos alguns tipos de permutações como as simples, com repetições, as circulares as caóticas. Vamos

iniciar pelas simples. Todos os resultados aqui discutidos são referentes a [1], [2], [3], [4], [8] e [11].

Quando se fala de permutações o fatorial é bastante utilizado, veja a definição a seguir:

Definimos o fatorial $n!$ de um número positivo n

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Se $n > 0$ e $0! = 1$, por convenção.

Vale salientar que por definição $0! = 1! = 1$. Vejamos uma aplicação.

Problema Olímpico 5. (OBMEP - 2014) O símbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de 1 até n , isto é, $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual é o valor de n ?

Solução: Neste caso iremos pegar a expressão $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ e decompor e ir agregando valores de forma estratégica para ficarmos com algum fatorial. A saber,

$$\begin{aligned} n! &= 2^4 \cdot (3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 7) \cdot 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 16! \end{aligned}$$

Logo, $n = 16$.

Observe que a definição de fatorial está fortemente ligada a noção de permutações, como veremos a seguir.

5.1. Permutações Simples

Dados n elementos distintos, chama-se permutação simples ou simplesmente permutação todo agrupamento ordenado (sequência) formado por esses n elementos.

Teorema 1. *O número de permutações simples de n objetos distintos, representado por P_n , é dado por:*

$$P_n = n!$$

Demonstração: *Vamos contar a quantidade de sequências distintas formadas por esses n objetos.*

Para a escolha do primeiro elemento da sequência, temos n possibilidades. O segundo elemento da sequência, uma vez definida a primeira posição, pode ser escolhido de $(n - 1)$ maneiras. Definidos os dois primeiros elementos da sequência, podemos escolher o terceiro elemento de $(n - 2)$ maneiras. $\dots$. Escolhidos os $(n - 1)$ primeiros elementos da sequência, o elemento que irá ocupar a última posição na sequência fica determinado de maneira única.

Assim, pelo PFC:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Antes de aplicarmos em problemas olímpicos, vejamos um exemplo básico.

Exemplo 2. De quantas maneiras podemos formar uma fila com Rafael, Luana, Daiana, Samuel e Igor?

Solução: Podemos escolher o primeiro da fila de 5 maneiras, o segundo de 4 maneiras, o terceiro de 3 maneiras, o penúltimo de 2 maneiras e o último de apenas uma maneira (a pessoa que sobrar). Desse modo, temos

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Problema Olímpico 6. (OBM – 2004) De quantas maneiras diferentes podemos pintar (usando apenas uma cor) as casas de um tabuleiro 4×4 , de modo que cada linha e cada coluna possuam exatamente uma casa pintada?

Solução: Podemos analisar por colunas ou por linhas, no caso analisaremos por colunas. Note que a cada coluna devemos escolher exatamente uma casa para pintar, sem esquecer as restrições. Na primeira coluna temos quatro possibilidades de escolha. Uma vez escolhida uma casa da primeira coluna, na segunda coluna resta apenas três possibilidades. Na terceira coluna resta apenas duas possibilidades, e na quarta coluna resta apenas uma possibilidade para ser pintada, portanto temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras. (Usando apenas o PFC)

Outra Solução usando permutações simples.

Veja a configuração abaixo.

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
c1	c2	c3	c4

Figura 4: Pintando Tabuleiro (Autor, 2019)

Note que esta é uma configuração que atende as restrições do problema, logo cada coluna tem uma casa diferente pintada, nisto para encontramos todas as configurações possíveis só precisamos permutar as colunas C1, C2, C3 e C4, portanto $P_4 = 4! = 24$ maneiras

Problema Olímpico 7. (OBMEP – 2019) As 6 cadeiras de uma fila são numeradas de 1 a 6 e devem ser ocupadas uma de cada vez de modo que, sempre que possível, é escolhida uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Por exemplo, é válida a ordem de ocupação **1 6 3 2 4 5**, em que a primeira pessoa ocupa a cadeira 1, a segunda, a cadeira 6, a terceira, a cadeira 3, a quarta, a cadeira 2, a quinta, a cadeira 4 e a última, a cadeira 5. Já a ordem **1 5 2 3 6 4** não é válida, pois a terceira pessoa sentou-se ao lado da primeira quando poderia ter se sentado em uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Quantas ordens de ocupação válidas existem?



Figura 5: Cadeiras em Fila (OBMEP)

Solução: Observe que a ocupação dos lugares se dá em duas etapas: primeiramente, os lugares são ocupados de modo que não haja cadeiras vizinhas ocupadas, até que isto não seja mais possível e depois, os demais lugares são ocupados em qualquer ordem.

Vamos, inicialmente, encontrar as configurações maximais, para as quais não há cadeiras vizinhas ocupadas, mas tais que o próximo a chegar necessariamente precisará sentar ao lado de alguém. Há dois tipos de configurações maximais:

- Com 3 pessoas, que podem ocupar os lugares 1, 3, 5; 1, 3, 6; 1, 4, 6; ou 2, 4, 6
- Com 2 pessoas, que devem ocupar os lugares 2 e 5

Sabendo as configurações maximais, vamos calcular cada caso.

Para cada uma das 4 situações do primeiro caso, há $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades de ordem de ocupação dos lugares da configuração maximal; a seguir, para cada uma dessas possibilidades, resta permutar os demais lugares, logo temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot P_3 = 24 \cdot 6 = 144$ possibilidades.

No segundo caso, há 2 possibilidades para a ordem de ocupação dos assentos 2 e 5; a seguir, resta permutar os demais lugares, logo temos $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 24 = 48$ possibilidades.

Portanto, o número de ordens de ocupação válidas são $144 + 48 = 192$.

Problema Olímpico 8. (Canguru de Matemática – 2015) Paula tem cinco livros diferentes, três dicionários e dois romances, em uma prateleira de sua estante. De quantas maneiras diferentes ela pode arrumar esses livros, de forma que os dicionários fiquem juntos e os romances fiquem juntos?

Solução: A princípio vejamos o bloco de três dicionário com sendo apenas um elemento e o bloco de dois romances também com um único elemento. Daí o número de permutações desses dois elementos é $2!$. No entanto olhando para o bloco de três dicionário podemos embaralhá-los de $3!$ maneiras diferentes e no bloco dos romances, de $2!$ maneiras diferentes.

Portanto, o número de maneiras diferentes com que Paula pode arrumar seus livros é igual a $2! \cdot 3! \cdot 2! = 24$ maneiras diferentes.

5.2. Permutações com Elementos Repetidos

Teorema 2. Dados n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 , n_2 são iguais a a_2 , n_3 são iguais a a_3 , ... , n_r são iguais a a_r (em que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$), o número de permutações desses n elementos é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_r!}$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [8].

Vejamos um exemplo simples para fixar o Teorema 2.

Exemplo 3. Um adorno natalino recebe cinco lâmpadas, sendo que duas delas possuem a mesma cor, como mostra o exemplo abaixo. Dispondo apenas dessas lâmpadas, de quantas maneiras distintas é possível distribuí-las?

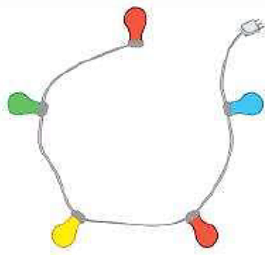


Figura 6: Lâmpadas (BALESTRE)

Solução: Observe que podemos distribuir as 5 lâmpadas em qualquer ordem, no entanto, duas delas possuem a mesma cor, configurando um probleminha de permutações com elementos repetidos. Sendo assim,

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$$

Portanto, há 60 maneiras distintas de distribuir essas cinco lâmpadas.

Vale salientar, que este mesmo problema poderia ser resolvido usando o princípio fundamental da contagem, fazendo suas interpretações corretas.

Problema Olímpico 9. (OBMEP – 2019) A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?



Figura 7: Rã Zinza (OBMEP)

Solução: Vamos especificar os tipos de pulos.

A := Pular de uma em uma pedra.

B := Pular por cima de uma pedra.

C := Pular por cima de duas pedras.

Observe que temos três configurações que atendem as restrições do problema, a saber:

- i) 2 pulos tipo C e 3 pulos tipo A (2C e 3A)
- ii) 1 pulo tipo C, 2 pulos tipo B e 2 pulos tipo A (1C, 2B e 2A)
- iii) 4 pulos tipo B e 1 pulo tipo A (4B e 1A)

Agora, consiste apenas em calcular o número de permutações em cada caso (Note que são permutações com elementos repetidos). Sendo assim, temos:

$$P_5^{3,2} + P_5^{2,2} + P_5^4 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{4!} = 10 + 30 + 5 = 45$$

Portanto, há 45 maneiras diferentes de Zinza alcançar seu objetivo.

A seguir apresentaremos dois agrupamentos que sempre geram confusão na mente dos alunos, os ordenados (arranjos) e os não ordenados (combinações).

6. ARRANJOS

Todos os resultados aqui discutidos estão associados as referências [1], [4] e [10].

*Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se **arranjo** desses n elementos, tomados k a k (com $k \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.*

Note que na definição acima, fica bem claro a importância da ordem dos elementos, para caracterizar um problema de arranjos simples. Além disso as permutações, são casos particulares de arranjos.

Teorema 3. Dados n elementos distintos, o número de arranjos simples ($A_{n, k}$) desses elementos, tomados k a k é dado por:

$$A_{n, k} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Demonstração: Vamos usar o Princípio Fundamental da Contagem, a saber:

O primeiro elemento da sequência podemos escolher de n maneiras. O segundo elemento da sequência já pode ser escolhido de $(n - 1)$ maneiras distintas, pois já

fizemos a escolha anterior e não há repetição de elementos. Feitas as duas primeiras escolhas, há $(n - 2)$ maneiras diferentes de escolher o terceiro elemento da sequência, pois não pode haver repetição, $\dots$, para escolhermos o k -ésimo elemento, a partir das $(k - 1)$ escolhas anteriores, sobram $n - (k - 1) = (n - k + 1)$ opções.

Aplicando o PFC, a quantidade de arranjos possíveis é:

$$A_{n, k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$, ficamos com a seguinte expressão:

$$A_{n, k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot \frac{(n - k)!}{(n - k)!} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Como se queria demonstrar.

Vale salientar que os problemas que envolvem contagem do número de arranjos podem ser resolvidos pelo PFC ou pela aplicação dos modelos aqui deduzidos.

Vejamos um exemplo simples para fixar o Teorema 3.

Exemplo 4. Cinco jogadores de futebol, A, B, C, D e E, concorrem a um dos títulos de 1º, 2º ou 3º melhor jogador do campeonato brasileiro. De quantas maneiras diferentes esses títulos podem ser distribuídos?

Solução: Veja que esse é um problema de agrupamentos ordenados, pois a configuração ABC é diferente de BCA ou de qualquer permutação desses elementos, logo temos um problema de arranjos simples, logo

$$A_{5, 3} = \frac{5!}{(5 - 3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60.$$

Portanto, os títulos podem ser distribuídos de 60 maneiras diferentes.

Problema Olímpico 10. (OBMEP - 2018) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?



Figura 8: Estacionamento (OBMEP)

Solução: Vamos resolver esse problema utilizando uma estratégia bem interessante, no caso, vamos desconsiderar uma das restrições e depois vamos retirar os casos que não nos interessa, veja.

Vamos iniciar calculando quantas maneiras diferentes é possível estacionar os dois carros (observe que desconsideramos aqui o fato de não poderem ficar um do lado do outro), no caso devemos escolher duas das dez vagas existentes, como a ordem importa, temos: $A_{10, 2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$ maneiras.

Agora vamos calcular quantas maneiras podemos estacionar os dois carros de forma que eles fiquem um do lado do outro, neste caso iremos ver os dois carros como sendo apenas um, logo o estacionamento fica restringido a 9 vagas. Sendo assim podemos fazer a escolha de onde estacionar de 9 formas, porém ainda temos que observar que pode – se ter duas configurações: carro preto e carro rosa ou carro rosa e carro preto, portanto há $9 \times 2 = 18$ maneiras deles estacionarem juntos. Sendo assim a quantidade de maneiras de estacionarem de forma que fique pelo menos uma vaga livre entre eles é de $90 - 18 = 72$ maneiras

Vale ressaltar que esta técnica está em desuso, pois ao resolver um problema por meio dos arranjos simples, consiste apenas aumentar os passos, em contrapartida que, o Princípio Fundamental da Contagem dar agilidade. Logo é mais indicado estimular o aluno a usar o PFC do que fazer – lós decorar mais fórmulas e aumentar as chances de confusão com as combinações.

7. COMBINAÇÕES

Todos os resultados aqui discutidos estão associados as referências [1], [2], [4] e [10].

Dados n elementos distintos, chama-se **combinação** desses n elementos, tomados k a k (com $k \leq n$), qualquer subconjunto formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n .

Diferente dos arranjos, onde a ordem importa, neste caso ao se falar de subconjunto, já caracteriza a não importância da ordem dos elementos, por exemplo, os conjuntos $\{a,b\}$ e $\{b,a\}$ são iguais.

Teorema 4. Dados n elementos distintos, o número de combinações simples $(C_{n, k}) = \binom{n}{k}$ desses elementos, tomados k a k é dado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Demonstração: Usando o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n elementos disponíveis, temos:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = A_{n, k}$$

Agora vamos usar o PFC para contar o número de sequências distintas (ordens) que podem ser formadas com

os k elementos escolhidos (permutações de k elementos):

$$k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_k = k!$$

Pela definição de combinações, qualquer permutação desses k elementos dá origem a uma única combinação, logo o número de combinações dos n elementos tomados k a k é:

$$\binom{n}{k} = \frac{A_{n, k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n - k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Como se queria demonstrar.

Vejamos um exemplo simples para fixar o Teorema 4.

Exemplo 5. De quantas formas podemos dividir um grupo de 5 pessoas em um grupo de duas e outro de três pessoas?

Solução: Observe que ao escolher um grupo de duas pessoas, o outro grupo de três pessoas fica automaticamente determinado, logo basta calcularmos o número de formas de escolher as duas pessoas do primeiro grupo, a saber:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Portanto, há 10 maneiras diferentes de fazer a divisão.

Problema Olímpico 11. (Canguru de Matemática - 2014) Três vértices de um cubo são também vértices de um triângulo. Quantos desses triângulos não possuem vértices pertencentes a uma mesma face do cubo?

Solução: Vamos desconsiderar a restrição do problema, e calcular quantos triângulos podem ser formados com os vértices do cubo, logo após retiraremos os triângulos formados por vértices de uma mesma face.

Note que para formar um triângulo precisamos escolher apenas três dos oito vértices do cubo, e isso pode ser feito de $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ maneiras

Agora o número de triângulos formados com vértices de uma mesma face são $6 \cdot \binom{4}{3} = 6 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 6 \cdot 4 = 24$.

Portanto, o número de triângulos cujos vértices são vértices de um cubo, mas não da mesma face do cubo é igual a $56 - 24 = 32$.

Problema Olímpico 12. (Canguru de Matemática - 2015) Representamos por $\overline{ab}$ o número cujos algarismos são a e b , sendo a diferente de zero. De quantas maneiras você pode escolher os algarismos distintos a, b, c de forma que $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$?

Solução: Os algarismos a, b e c são todos distintos e diferentes de zero. Como $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$, basta considerar os algarismos das dezenas de cada número para concluirmos que $a < b < c$. Note que ao escolher três números distintos quaisquer do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$, de todas as permutações possíveis entre os três números escolhidos, haverá apenas uma que estará em ordem crescente, por exemplo, se escolhermos 1, 2 e 3 termos: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Veja que apenas 123 está em ordem crescente. Logo precisamos apenas calcular quantas combinações de três algarismos são possíveis. Sendo assim, há $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ maneiras de escolher a, b e c .

Problema Olímpico 13. (OBMEP - 2015) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada

participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Solução: Esse problema é bem interessante, veja que temos que escolher dois rapazes, independente de ordem, e isso pode ser feito de $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ maneiras. Agora vamos para as medalhas, temos que escolher duas medalhas, e neste caso pode – se ter duas medalhas iguais (ouro e ouro, prata e prata ou bronze e bronze). Usando o Princípio Fundamental da Contagem, isso pode ser feito de $3 \times 3 = 9$ maneiras.

Finalizando o problema, para a escolha de cada dupla de alunos, que pode ser feita de 10 maneiras, há 9 maneiras de se escolher um par de medalhas, e utilizando o Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de premiar dois alunos será de $10 \times 9 = 90$ maneiras.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos de contagem proporcionam uma destreza ao quantificar os elementos de um determinado conjunto, visto que não se precisa enumerar todos os casos, o que seria uma perda de tempo, e se tornaria um trabalho cansativo, sem falar que este tópico está presente em todas as competições matemáticas e no próprio enem, demonstrando que o domínio sobre essas técnicas proporcionará um ganho de tempo na resolução de problemas e minimizaria as chances de erros de contagem.

Este tópico pode ser apresentado de forma divertida para os alunos, se for utilizado de forma chamativa e intrigante, provocando os alunos a quererem resolver os problemas, e a utilização de problemas olímpicos é uma forma de fazer isso.

Com este trabalho acredita-se que foi possível mostrar a importância da utilização de problemas olímpicos para o ensino dos métodos de contagem na educação básica, melhorando assim, significativamente o ensino-aprendizagem, além de motivar os alunos a participar destas competições cada vez mais.

Existem outros tópicos de matemática que podem ser utilizados problemas olímpicos para serem ensinados de forma mais provocativa e divertida, como áreas, funções, probabilidades e etc. O que se pode notar é que a utilização de problemas olímpicos é uma ferramenta bem instigante e importante para ser utilizada.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BALESTRI, Rodrigo. Matemática: Interação e Tecnologia Vol.2. 2º ed. São Paulo: Leya, 2016.
- [2] BRASIL. Concurso Canguru de Matemática Brasil. Canguru de Matemática 2019. Disponível em: <<https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/para-escolas/provas-antiores>>. Acessado em: 30 set. 2019.
- [3] BRASIL. Olimpíada Brasileira de Matemática. OBM 2019. Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: <<https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>>. Acessado em: 30 set. 2019.
- [4] BRASIL. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. OBMEP 2019. Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acessado em: 30 set. 2019.
- [5] FORMIN, Dmitri; et. Al. *Círculos matemáticos: A experiência russa*. Trad. IMPA. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [6] FREITAS, J.L. Magalhães de. Et. al. Fundamentos e metodologias para o ciclo inicial. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 2004, Pernambuco, Anais – Minicurso. Pernambuco: SBEM, 2004. Disponível em <<http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/01/MC74619047872.pdf>>. Acesso em 8 de Set. de 2019.
- [7] GOMES, Alexandre Merison Santos; SOUZA, Rafael Araujo. *O Princípio da Inclusão - Exclusão e as Permutações Caóticas: Métodos Alternativos de Contagem*. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento, v. 16, p. 193-209, 2018.
- [8] HAZZAN, Samuel. *Fundamentos da matemática elementar vol. 5: Combinatória e probabilidade*. 3. ed. São Paulo: Atual, 1985.
- [9] HOLANDA, Bruno; CHAGAS, Emiliano A. *Primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [10] IEZZI, Gelson. et. al. *Matemática: Ciência e Aplicações Vol.2*. 9º ed. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [11] MORGADO, Augusto César; et. Al. *Análise combinatória e probabilidade*. 9 ed, Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [12] OLIVEIRA, K.I.M.; FERNÁNDEZ, A.J.C. *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [13] PIAUÍ. Olimpíada Piauiense de Matemática. OPIM 2019. Piauí, 2019. Disponível em: <<http://opim.ufpi.br/>>. Acessado em: 30 set. 2019.
- [14] REDE POC. Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras Brasil. MSF 2019. São Paulo. Disponível em <http://matematicasemfronteiras.org/index.html> >. Acessado em: 30 set. 2019.