O OUTRO LADO DO SABER

Matemática Básica

Métodos de Resolução de um Sistema de duas Equações do grau à duas Incógnitas. Teoria e Aplicações

Nunes Tchimúa Mucuata Rafael

2017

NAMIBE-ANGOLA

Métodos de Resolução de um Sistema de duas Equações à duas Incógnitas. Teoria e Aplicações

[1]Nunes Tchimúa Mucuata Rafael

Resumo

***Neste artigo científico tratou-se dos métodos de resolução de sistemas de duas equações do primeiro grau à duas incógnitas, bem como, a sua aplicação em situações práticas decorrentes da vida*.** A abordagem em causa tem o objectivo de aplicar os três métodos de resolução bastantes conhecidos, mas de forma diferente, isto é, na minha concepção, entendo que os métodos de redução e comparação podem ser aplicados sem recorrer à substituição para achar o conjunto-solução das incógnitas. Pode-se calcular o valor das incógnitas somente reduzindo os coeficientes simétricos das duas equações ou simplesmente comparando as duas equações, sem precisar de introduzir um outro conceito (substituição). O procedimento habitualmente conhecido, que consiste em reduzir os coeficientes simétricos ou comparar as equações para posteriormente aplicar a substituição tem dificultado a compreensão dos alunos que se deparam pela primeira vez com o conteúdo, bem como, a concretização êxitosa do processo de resolução. Todavia, aplicou-se também o sistema de duas equações na resolução de problemas matemáticos (relacionados á situações práticas do dia-a-dia), o que se diga abono da verdade, ser valioso para a obtenção de uma melhor compreensão e aprendizagem significativa dos conteúdos.

Palavras – chaves: *Sistema de Equações; Métodos de resolução; Problemas matemáticos.*

Abstract

***In this scientific article we dealt with the methods of solving systems of two equations of first degree to two unknowns, as well as their application in practical situations arising from life*.** The approach in question is intended to apply the three well-known methods of resolution, but in a different way, that is, in my conception, I understand that the reduction and comparison methods can be applied without resorting to finding the solution-set Of unknowns. You can calculate the value of the unknowns only by reducing the symmetric coefficients of the two equations or simply by comparing the two equations without having to introduce another concept (substitution). The commonly known procedure of reducing symmetric coefficients or comparing equations to subsequently apply substitution has made it difficult for students who are faced with content to comprehend and for the successful completion of the resolution process. However, the system of two equations was also applied in solving mathematical problems (related to practical situations of daily life), what is said to be true, to be valuable in order to obtain a better understanding and meaningful learning of the Content.

Key - words: *Equation system; resolution methods; mathematical problems*.

---

[1]Escola Superior Politécnica do Namibe da Universidade Mandume Yandemofayo.

Email: nunestchimua@gmail.com.

Versão actualizada (2017)

Introdução

Neste artigo, tratou-se de sistemas de duas equações primeiro grau à duas incógnitas, onde apresentou-se teorias que facilitam a compreensão do conceito, bem como suas aplicações. Sobre os métodos de resolução apresentou-se uma abordagem diferente da habitual acerca dos métodos de resolução, principalmente os métodos de redução e comparação.

A abordagem em causa, foi feita com intuito de facilitar a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos que se deparam pela primeira vez com o assunto e que sá, aqueles que apesar do nível avançado pretendem aprimorar ou aprofundar suas capacidades.

A palavra sistema, traz-nos uma ideia relacionada a um conjunto de elementos interligados entre si em prol da realização de uma função. Sistema de duas equações, tem uma denominação quase semelhante à ideia anterior.

É sabido que equação do primeiro grau, é uma igualdade onde aparece no mínimo uma variável com expoente 1. Existe uma diferença entre variável e incógnita, que muitas vezes é confundida. Ambas não deixam de ter a designação de variáveis, por representarem quantidades desconhecidas até que se calcule esse valor. Uma variável é denominada incógnita, quando pretende-se calcular seu valor. Como exemplo vamos analisar uma equação do primeiro grau com duas variáveis, $x + y = 5$, nesse caso ao calcular o valor de x assume a denominação de incógnita, enquanto y continua a ser uma variável. Repare que ao calcularmos o valor de y, elas assumem denominações diferentes.

Portanto, esperamos que o caríssimo leitor tire algum proveito do trabalho e que acima de tudo aplique o pensamento aqui apresentado, poís, a Matemática de modo geral e os sistemas de duas equações em particular têm aplicações em diversas áreas, desde a vida diária até á ciência e tecnologia.

Sistema de duas equações do primeiro grau a duas incógnitas

Definição: Sistema de duas equações do primeiro grau a duas incógnitas, é um conjunto de duas equações com duas variáveis de expoente 1 interligadas por uma chaveta representadas da seguinte forma:

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{; Com: } (a_1 e\ b_1) \neq 0$$

$$(a_2\ e\ b_2) \neq 0$$

$$(a_1\ e\ a_2) \neq 0$$

$$(b_1\ e\ b_2) \neq 0$$

Obs: *Os coeficientes acima referenciados não podem simultâneamente iguais a zero.*

O sistema acima está representado na forma canónica. Os coeficientes indicados devem ser simultâneamente diferentes de zero, de contrário o sistema deixa de existir, mas, a_1v a_2v b_1 v b_2 v $(a_1\ e\ b_2)$ v $(b_1\ e\ a_2)$ podem ser iguais a zero, observa-se que podem ser nulos simultâneamente os coeficientes: $(a_1\ e\ b_2)$ v $(b_1\ e\ a_2)$. Poís, a anulação dos coeficientes dos termos não semelhantes, não implica a inexistência do sistema.

No caso de, o sistema não estar escrito na forma canónica e houver necessidades de provar se é ou não de duas equações a duas incógnitas, aplica-se procedimentos matemáticos para representa-lo na forma canónica.

Exemplo$_1$: Escreve o sistema na forma canónica.

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}\begin{cases} -4(5x + y) = +14 + (x - 2y) \\ \frac{1}{2}(3y + 10) - y - \frac{1}{2}y + \frac{4}{3} = -3(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}\begin{cases} -19x + 3y = 14 \\ 3x + 3y = -8 \text{; Forma canónica.} \end{cases}$$

Exemplo$_2$: Dados os sistemas abaixo, seleccione os que representam um sistema de duas equações a duas incógnitas e os que não representam.

(1) $\begin{cases} \text{I} & -6x + 4y = 10 \\ \text{II} & 2x - 3y = -5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \text{I} & x + 2y = x - 18 - 4y \\ \text{II} & 4x - 3y = 6x - 3y + 20 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} \text{I} & \frac{-2(2x-5y)}{3} = 4 + \frac{10}{3}y - \frac{4}{3}x \\ \text{II} & -(-3x+4) = 6x + 4 - y \end{cases}$

Escrevendo os sistemas (2) e (3) na forma canónica:

Partindo de (2):

$\begin{cases} \text{I} & x + 2y = x - 8 - 4y \\ \text{II} & 4x - 3y = 6x - 3y + 20 \end{cases}$, agrupando os termos semelhantes nas duas equações:

$$\begin{cases} \text{I} & 0x + 6y = -18 \\ \text{II} & 10x + 0y = 20 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{I} & 6y = -18 \\ \text{II} & 10x = 20 \end{cases}$$

De (3):

$$\begin{cases} \text{I} & \frac{-2(2x-5y)}{3} = 4 + \frac{10}{3}y - \frac{4}{3}x / \, . \, 3 \\ \text{II} & -(-3x+4) = 6x + 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I} & -4x + 10y = 12 + 10y - 4x \\ \text{II} & 3x - 4 = 6x + 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I} & 0x + 0y = 12 \\ \text{II} & -3x + y = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{I} & 0 \neq 12 \\ \text{II} & -3x + y = 8 \end{cases}$$

Portanto, (1) e (2) são sistemas de duas equações a duas incógnitas e (3) não é um sistema de duas equações a duas incógnitas.

Nota: Se($a_1 = a_2 \; e \; b_1 = b_2$) v ($a_1 = b_1 \; e \; a_2 = b_2$) , o sistema não tem solução, isto é, não existe x e y que satisfaz o sistema.

Solução de um sistema

O par ordenado $(x\,;y)$, é dito solução do sistema se e só se satisfazer as duas equações, isto é, após a substituição dos valores das incógnitas no sistema obter-se o seguinte:

$$\begin{cases} \text{I} & a_1x + b_1y = c_1 \\ \text{II} & a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{I} & c_1 = c_1 \\ \text{II} & c_2 = c_2 \end{cases}$$

Exemplo: Verifica se os pares $(0\,;-3)$ e $(5\,;2)$ são soluções do sistema:

$$\begin{cases} \text{I} & 4x - 3y = 14 \\ & \end{cases}$$

II $-2x + y = -8$

Solução:

$(0\ ; -3)$, substituindo:

I: $4x - 3y = 14$

$4\,.0 - 3\,.(-3) = 14$

$9 \neq 14$

$S = \emptyset$

$(5\ ; 2)$, substituindo:

I: $4x - 3y = 14$ II: $-2x + y = -8$

$14 = 14$ $-8 = -8$ $S = \{(5\ ; 2)\}$

Portanto, vemos que somente o par $(5\ ; 2)$ é solução e o outro par não é solução, poís, não verifica as condições iniciais do sistema.

Métodos de resolução de um sistema

1. **Método de redução**

O método de redução, consiste em reduzir os coeficientes simétricos dos termos semelhantes.

Para resolver um sistema aplicando o método de redução segue-se os passos:

a) Observe se o sistema está escrito na forma canónica, caso não, escreve-o.
b) Observe se no sistema existem termos simétricos, caso não, multiplique uma das equações por um número de modo que se possa obter coeficientes simétricos.
c) Reduzir os termos simétricos, adicionar as duas equações e calcular valor da variável restante.
d) Formar novamente o sistema e seguir o mesmo processo para calcular o valor da outra variável.
e) Verificar se o par ordenado é solução do sistema e escrever o Conjunto-solução.

Exemplo$_1$: Resolve

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}\begin{cases} -\cancel{4x} + y = 19 \\ \cancel{4x} - 6y = -54 \end{cases}$$

$$y = 7$$

Calculando o valor de x:

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}\begin{cases} -4x + y = 19 / .(6) \\ 4x - 6y = -54 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}\begin{cases} -24x + \cancel{6y} = 114 \\ 4x - \cancel{6y} = -54 \end{cases}$$

$$x = -3$$

Verificação$_1$

I) $-4x + y = 19$

$19 = 19$

Verificação$_2$

II) $4x - 6y = -54$

$-54 = -54$

$$S = \{(-3; 7)\}$$

2. Método de comparação

O método de comparação, consiste em comparar as expressões de uma incógnita obtidas a partir de das duas equações.

Para resolver um sistema aplicando o método de comparação, obedece-se os seguintes procedimentos:

a) Verificar se nas duas equações do sistema tem uma incógnita isolada, caso não tenha:

b) Isolar as incógnitas nas duas equações e comparar as expressões correspondentes às incógnitas.

c) Agrupar os termos semelhantes e calcular o valor de cada incógnita.

e) Verificar se o par é solução do sistema.

Exemplo: Resolve

$$\begin{cases} x + y = 8 & \text{I} \\ -x + y = -4 & \text{II} \end{cases}$$

Isolar x nas duas equações:

I: $x + y = 8$ II: $-x + y = -4$

$x = 8 - y$ (*) $x = 4 + y$ (**)

Isolar y nas duas equações:

I: $x + y = 8$ II: $-x + y = -4$

$y = 8 - x$ (***) $y = -4 + x$ (****)

Comparar (*) e (**), temos:

$x = x$, logo:

$8 - y = 4 + y$

$y = 2$

Comparar (***) e (****), temos:

y= y, logo:

$8 - x \;== -4 + x$

$x = 6$

Verificar se o par (6;2) é solução:

Verificação1 Verificação2

I: $x + y = 8$ II: $-x + y = -4$

$8 = 8$ $-4 = -4$

$S = \{(6;2)\}$

3. Método de substituição

O método de substituição, consiste em substituir numa equação a expressão correspondente a uma das incógnitas.

Para resolver um sistema aplicando o método de substituição seguem-se os passos:

a) Observar se o sistema tem uma incógnita isolada, caso não, isolar uma das incógnitas numa das equações.
b) Substituir a expressão correspondente a incógnita noutra equação e resolve-la.
c) Substituir o valor da incógnita obtida, noutra equação
d) Verificar se o par ordenado é solução do sistema.

Exemplo: Resolve

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

- Isola x na 1ª equação

I: $x + y = 8$

$$x = 8 - y \ (*)$$

- Substituir (*) na 2ª equação

II: $x - y = -4$

$(8 - y) - y = -4$

$$y = 6$$

- Substituir y em (*)

$x = 8 - y$

$x = 2$

Verificar se o par $(2; 6)$ é solução do sistema

Verificação$_1$	Verificação$_2$
I: $x + y = 8$	II: $x - y = -4$
$8 = 8$	$-4 = -4$

$$S = \{(2; 6)\}$$

Aplicações do Sistema de duas Equações

Ao efectuar a aplicação do sistema de duas equações do primeiro grau a duas incógnitas, é importante ter-se em conta a tradução da linguagem corrente Portuguesa em linguagem matemática, assim temos.

- Geralmente, o que se pretende calcular (incógnita) representa-se por uma letra (x ou y), o que impede o uso de uma outra letra.

Tradução dos termos (Exemplo):

- Soma – resultado da adição de números; Diferença – resultado da subtração do maior número ao menor; Produto – resultado da multiplicação de números; Quociente – resultado da divisão de dois números.

- Dobro -- $2x$; Triplo -- $3x$; Quádruplo -- $4x$; Quintúplo -- $5x$; Sextuplo -- $6x$, assim por diante.

- Metade : $\frac{1}{2}$; Um terço ou terça parte : $\frac{1}{3}$; Um quarto ou quarta parte : $\frac{1}{4}$; Um quinto ou quinta parte : $\frac{1}{5}$, assim por diante. Repare que além da leitura das fracções com numerador 1, nos casos em que o numerador é diferente da unidade, tem-se:

- Dois terços -- $\frac{2}{3}$; Três quartos -- $\frac{3}{4}$; Sete onze avos -- $\frac{7}{11}$; Cinco doze avos -- $\frac{5}{12}$;

Atenção: A proposição de, em matemática significa multiplicação e 1 representa uma unidade

- Sucessor de número -- $(x+1)$; Antecessor de um número -- $(x-1)$; Daqui a cinco dias -- $(x+5)$; Cinco dias atrás -- $(x-5)$; Excede três unidades ou a mais -- $(x+3)$; Quatro unidades a menos -- $(x-4)$.

A interpretação do problema é ponto fulcral no processo de resolução de um problema aplicando sistema de duas equações. Foram elaborados problemas para consolidar os conhecimentos abordados nos itens passados, desde já, espero que possas retirar maior proveito no que tange a percepção e resolução de problemas matemáticos.

Passos para resolução de um problema matemático aplicando sistema de duas equações

a) Leitura e interpretação do problema
b) Tradução do problema e extracção dos dados
c) Elaboração do plano de solução
d) Execução do plano de solução

e) Comprovação da solução
f) Redacção da resposta.

Portanto, no processo de resolução, a construção de um algoritmo compatível ao problema tem um carácter basilar na obtenção êxitosa na solução do problema.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

(Exercício 1): Uma zungueira de frutas, tinnha na sua bacia, laranjas e maçãs. A diferença entre a quantidade das laranjas e das maças é 15 e no total ela possuía 55 frutas. Qual era a quantidade de laranjas e de maçãs?

Dados

x – laranjas

y – maçãs

$x - y$ - Diferença entre as laranjas e maçãs

$x + y$ - Total

x =?

y =?

Sistema

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}\begin{cases} x - y = 15 \\ x + y = 55 \end{cases}$$

$x = 35; y = 20$. Logo:

Ela tinha 35 laranjas e 20 maçãs

(Exercícios 2): A idade da Elisa equivale a metade da idade que a sua mãe tinha no ano passado. A diferença entre o triplo da idade da Ana e a idade actual da sua mãe é igual a 19 anos. Quantos anos têm cada uma?

Dados

x - Idade da Elisa

y – Idade actual da sua mãe

$(y - 1)$ - Idade que a mãe da Elisa tinha no ano passado

$\frac{(y-1)}{2}$ - Metade da idade que a mãe da Elisa tinha no ano passado

$3x$ - Triplo da idade da Elisa

$(3x - y)$ - Diferença entre o triplo da idade da Elisa e a idade actual da sua mãe

$x =?$

$y =?$

Sistema

$$\begin{cases} x = \frac{(y-1)}{2} & \text{I} \\ 3x - y = 19 & \text{II} \end{cases}$$

$x = 20; y = 41$. Logo:

A Ana tem 20 anos de idade e a sua tem 41 anos de idade.

(Exercícios 3): A Jepele tem na sua bolsa 3 kz em moedas de 10 centavos e 1,2 kz em moedas de 2 centavos. A quantidade das moedas de 10 centavos é a metade do número das moedas de 2 centavos. Quantas moedas há na bolsa?

Dados

x- Moedas de 10 centavos

y - Moedas de 2 centavos

$2y$ – Dobro do número das moedas de 2 centavos

$x =?$

$y =?$

$x + y =?$

$4{,}2\ kz = 420$ centavos

Sistema

$$\begin{cases} 10x + 2y = 420 & \text{I} \\ x = \frac{1}{2}y & \text{II} \end{cases}$$

$x = 30; y = 60$

$(x + y) = 90$. Portanto, na bolsa há 90 moedas.

(Exercícios 4): Uma empresa de telefonia móvel tem a seguinte tarifa para seus clientes:

1,5 utts por minutos na mesma rede e 3 utts para outras redes. Um cliente com 352,5 utts de saldo falou 125 minutos, quanto gastou com clientes da mesma rede e com clientes de outras redes?

Dados

x - Tempo gasto na mesma rede?

y - Tempo gasto noutras redes?

Total de utts – 352,5

Tempo total – 125 minutos

Sistema

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} 1{,}5x + 3y = 352{,}5 \\ x + y = 125 \end{cases}$$

$x = 15$; $y = 110$. Portanto, O cliente gastou 15 minutos na mesma rede e 110 minutos noutras redes.

(Exercícios 5): O jovem Tchitoma participou num desafio de basquetebol para o lançamento de uma bola no cesto a longa e a curta distância. Cada lançamento acertado a longa distância equivale 3 pontos e a curta 2 pontos, no total fez 15 lançamentos e amealhou 20 pontos. Quantos lançamentos encestou a longa e a curta distância?

Dados

x – Lançamentos a longa distância?

y - Lançamentos a curta distância?

15 Lançamentos e 20 pontos.

Sistema

$$\mathrm{I} \begin{cases} x + y = 8 \\ \end{cases}$$

II $3x + 2y = 20$

$x = 4; y = 4$. Portanto, encestou 4 lançamentos a longa e 4 a curta distância.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. O dobro da terça parte da soma de dois números diminuído a sexta parte da diferença entre o maior e o menor é igual a dez terços. O maior é igual ao quíntuplo do menor. Quais são os números?

2. Um grupo de 5 amigos foram a um restaurante da cidade do Namibe, pretendiam comer Calulú com funge. Havia duas opções:

A: Calulú com funge milho – 2.500 kz;

B: Calulú com funge de bombom - 1.750 kz. Sabendo que no total gastaram 11. 000, quantos comeram Calulú com funge de milho? E quantos optaram em Calulú com funge de bombom?

3. Em um restaurante há 11 mesas, todas ocupadas. Algumas por 3 pessoas e outras por 2 pessoas num total de 28 clientes. Quantas mesas foram ocupadas por três pessoas?

4. Em um exame de acesso numa Universidade angolana, os candidatos fizeram uma prova com 14 questões. Pelas normas estabelecidas, para cada questão certa atribui-se (+1,5) valor e para uma errada (-0,5). Se um candidato obteve 15 valores. Acertou quantas questões?

5. O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma 41.000,00 U$D. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de 28.000,00 U$D. Qual é a diferença entre o valor do carro e o da moto?

TESTE

Um número N formado por dois algarismos, abc: o algarismo das dezenas é a metade das unidades, o das dezenas é o triplo das unidades. Invertendo-se a ordem dos algarismos daquele número obtem-se um número M cba, igual ao número A diminuído de 200. Calcula o produto,(N x M).

BIBLIOGRAFIA

Lezzi, Gelson e Outros; Matemática Volume Única; Actual Editora; S. Paulo-Brazil. (2007).

Neves, Augusta Ferreira e Luís Guerreiro e Outros; Matemática 12º Ano; Porto Editora; Porto-Portugal. (2006).

Schor , damian e Tizziotti, José Guilherme; Matemática Segundo Grau VolumeI; Editora Ática S.A; S.Paulo-Brasil. (1943).

1- Cury N. H., Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações; Ed. Bolema: São Paulo Brasil. (2009).