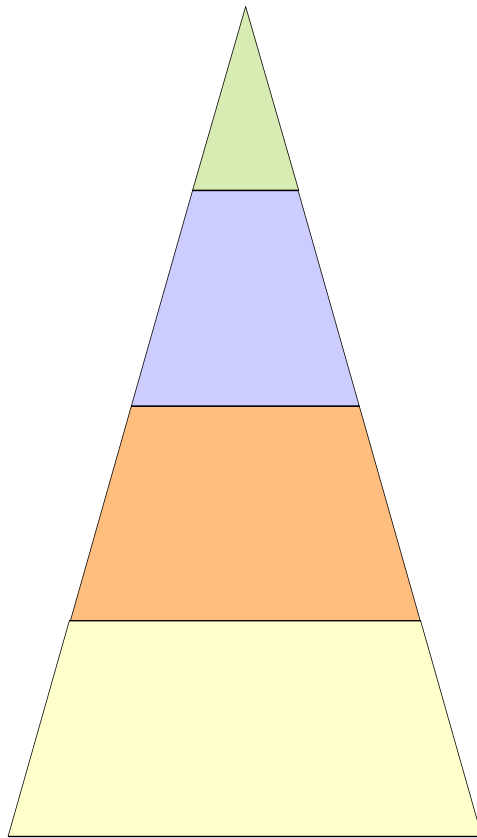


Mini manual compacto de Matemática-trigonometria

Técnicas de Desenvolvimento das fórmulas trigonométricas

Por: Alcides Domingos Cambundo (licenciado em Ciências Matemáticas)



$$\textit{sen}^2 x + \textit{cos}^2 x = 1$$

Índice

1. Triângulo rectângulo
2. Razões trigonométricas
3. Teorema de Pitágoras
4. Desenvolvimento da fórmula fundamental da trigonometria
5. Desenvolvimento das fórmulas derivadas
6. Desenvolvimento das fórmulas de arco duplo e arcos metades
7. Desenvolvimento da soma e subtracção de arcos

Prefácio

A trigonometria teve seu desenvolvimento relacionado aos estudos de astronomia, a medida que surgiu a necessidade de se estudarem as fases da Lua, eclipses, distância entre planetas etc.

O conhecimento científico e preciso de todos esses fenómenos facilitou a determinação de rotas de navegação e, conseqüentemente, a expansão territorial. Com o desenvolvimento da matemática, a trigonometria tornou-se independente da astronomia e passou a ser aplicada em outras áreas da ciência, destacando-se na física, por exemplo, nos movimentos circulares, no movimento de oscilação de um pêndulo, na óptica, na cinemática vectorial etc.

A palavra trigonometria tem origem grega e significa “medida de três ângulos”. Basicamente, o que se estuda na trigonometria é a relação entre ângulos e distâncias. Por conta disso, é imprescindível o conhecimento das relações entre ângulos.

Com objectivo de incentivar e elucidar os alunos do 2º ciclo do ensino secundário e do ensino médio técnico no que toca ao conhecimento das principais fórmulas trigonométricas e suas deduções, achei por bem elaborar este pequeno material, para que de forma objectiva os leitores e interessados pela Matemática entendam que não é necessário “decorar” todas as fórmulas da trigonometria, basta apenas conhecer de forma profunda as principais fórmulas pois as demais com ajuda de deduções matemáticas, são secundárias ou derivadas destas principais.

1. Triângulo rectângulo

Chamamos de triângulo rectângulo àquele que possui um ângulo recto (ângulo de 90°).

Dizemos que os outros ângulos são agudos (menores que 90°).

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , no triângulo rectângulo os ângulos agudos são complementares, pois somam 90° .

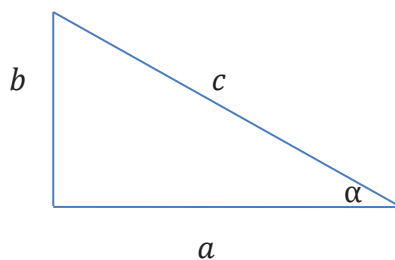
No triângulo rectângulo, os lados recebem nomes específicos:

Catetos e hipotenusa. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo recto, e os catetos são os lados opostos aos ângulos agudos. Os vértices são identificados com letras maiúsculas.

2. Razões trigonométricas

Sabendo identificar os catetos, podemos definir as razões trigonométricas: seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg).

Consideremos o triângulo abaixo:



Sendo α o ângulo, podemos definir as seguintes relações:

$$(1). \cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$(2). \sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$(3). \tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

Assim sendo, tendo (1), (2) e (3) podemos obter outras razões trigonométricas; vejamos então:

Invertendo ambos membros das expressões (1), (2) e (3) obtemos outras razões denominadas respectivamente secante(sec), co-secante(cossec) e co-tangente (Ctg), ou seja,

$$(4). \text{Ctg} \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{cateto oposto a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$(5). \operatorname{Sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$(6). \operatorname{Cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

3. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: Seja o triângulo rectângulo ABC considerado anteriormente, em que os catetos são a e b respectivamente e c o comprimento da hipotenusa, tem-se:

Em todo triângulo rectângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado do comprimento da hipotenusa. Analiticamente temos: $a^2 + b^2 = c^2$.

4. Desenvolvimento da fórmula fundamental da trigonometria

Nesta secção vamos deduzir minuciosamente a essência da fórmula fundamental da trigonometria, o estudante não vai precisar decorar a fórmula, as técnicas que vão ser aplicadas vai permitir você conhecer a essência dela, partindo do pressuposto que domina-se os principais conceitos e propriedades de potenciação, pois é condição necessária para tal.

Sabendo que $a^2 + b^2 = c^2$ (*), $\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{c}$ (2), $\cos \alpha = \frac{a}{c}$ (1), dividindo ambos

membros de (*) por $c^2 > 0$ obtemos, $\frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$, pela propriedade da potenciação, obtemos $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ (#) pondo (1) e (2) em (#) vem:

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \quad (7)$$

A expressão (7), é a famosa fórmula fundamental da trigonometria, como podemos observar, chegamos a esta fórmula de uma maneira fácil e clara, portanto o estudante não precisa decorar tantas fórmulas, precisa é saber a essência delas.

5.Desenvolvimento das fórmulas derivadas

Como vemos, partimos de uma fórmula muito conhecida para encontrar a fórmula (7), a partir desta, mediante alguns mecanismos matemáticos vamos encontrar outras fórmulas derivadas ou secundárias.

Dividindo todos termos de (7) por $\cos^2\alpha$, $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \left(\frac{\sen\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ (8); de igual modo dividindo (7) por $\sen^2\alpha$, Obteremos $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$ (9).

Por outro lado, multiplicando (3) com (4) vem: $\tan\alpha \times \cot\alpha = \frac{\sen\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{\cos\alpha}{\sen\alpha} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tan\alpha \times \cot\alpha = 1 \text{ (10)}$$

BIBLIOGRAFIA

Bosquilha, Alessandra

Minimanual compacto de matemática: teoria e prática: ensino médio
/ Alessandra Bosquilha, Marlene Lima Pires Corrêa, Tânia Cristina Neto
G. Viveiro. -- 2. ed. rev. -- São Paulo : Rideel, 2003.

ISBN 85-339-0585-8

1. Matemática (Ensino médio) I. Corrêa, Marlene Lima Pires. II. Viveiro,
Tânia Cristina Neto G. III. Título

Mini-manual compacto de Matemática; Alessandra Bosquilha, Marlene Lima Pires
Corrêa, Tânia Cristina Neto G. Viveiro.

2. História da Matemática; Carl Bayer, 2009