Inequações-quociente : Indagações da Sala de Aula

Leonardo Gonçalves Rimsa

Mestre em Matemática – UFSJ

Professor do CEFET-MG / Campus Contagem

1) Introdução

Inequação-quociente, como o próprio nome sugere, é aquela expressa pelo quociente de duas funções. São, então, inequações do tipo : $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \; ou \; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$. Ou então aquelas que podem ser reduzidas a uma destes quatro tipos.

Na primeira série do ensino médio, estas inequações são apresentadas aos estudantes com o envolvimento de funções polinomiais simples, ou seja, $f \; e \; g$ são, geralmente, funções afins ou quadráticas.

O método abordado pela maioria dos livros didáticos para a resolução delas envolve o estudo de sinais das funções envolvidas, com posterior confecção de um quadro de sinais, onde será analisado o sinal do quociente, com a afirmação da solução do problema.

Minha experiência em sala de aula me fez deparar, várias vezes, com a seguinte indagação de meus alunos : *"Por quê não posso, simplesmente, multiplicar ambos os membros da desigualdade por $g(x)$ e eliminar o denominador?"*

A resposta a esta questão é simples : Por que nem sempre podemos garantir que o denominador é positivo para todos os valores de x! Uma propriedade importante dos números reais nos diz que, ao multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por número real negativo, devemos invertê-la. Desse modo, podemos até adotar o procedimento proposto, mas tomando o cuidado de "separar" os casos em que $g(x)$ é positiva dos casos em que é negativa.

Neste artigo, vamos resolver uma inequação-quociente por dois métodos. O primeiro consiste em confeccionar o quadro de sinais, como é feito em materiais didáticos comuns. O segundo, será analisando o sinal da função-denominador e separando os casos em que ela é positiva ou negativa. O objetivo é tirar dúvidas e mostrar os dois métodos a professores e alunos da educação básica.

Tomaremos, como exemplo, a inequação $\frac{x^2+2x-18}{x-4} \leq 5$, que deve ser resolvida tendo como universo o conjunto dos números reais.

2) Primeiro Método : Quadro de Sinais

Primeiramente, devemos "passar" o 5 ao primeiro membro, para que a inequação fique de uma das quatro formas mostradas acima :

$$\frac{x^2+2x-18}{x-4} \leq 5 \rightarrow \frac{x^2+2x-18}{x-4} - 5 \leq 0 \rightarrow \frac{(x^2+2x-18)-5(x-4)}{x-4} \leq 0 \rightarrow$$

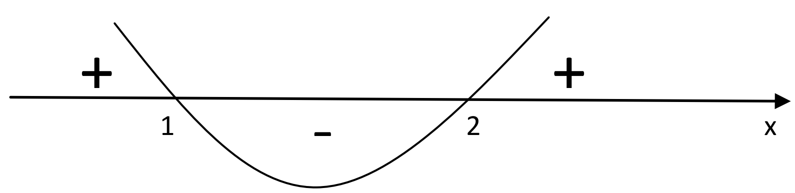
$$\rightarrow \frac{x^2+2x-18-5x+20}{x-4} \leq 0 \rightarrow \frac{x^2-3x+2}{x-4} \leq 0$$

Vemos que a inequação é do quarto tipo mostrado acima, com $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = x - 4$. O que queremos é analisar o sinal das duas funções e verificar para quais valores de x o quociente das duas é negativo ou zero.

A primeira função ($f(x) = x^2 - 3x + 2$) é quadrática. Suas raízes são :

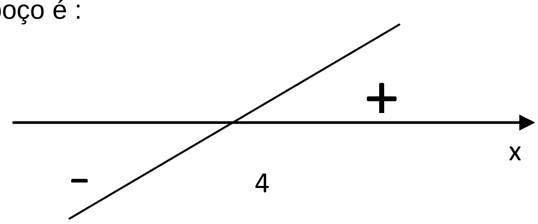
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow x = 1 \; ou \; x = 2$$

O gráfico é uma parábola com concavidade para cima. Seu esboço está a seguir :



Podemos observar que a função $f(x)$ é POSITIVA para $x < 1\ ou\ x > 2$, NEGATIVA para $1 < x < 2$ e NULA para $x = 1\ ou\ x = 2$.

Já a função $g(x) = x - 4$ é afim. Seu gráfico é uma reta crescente que tem $x = 4$ como raiz e cujo esboço é :



Vemos que $g(x)$ é POSITIVA para $x > 4$, NEGATIVA para $x < 4$ e NULA para $x = 4$.

O quadro de sinais coloca as informações dos sinais das duas funções e nos permite analisar o sinal do quociente delas :

		1		2		4	
f	+		-		+		+
g	-		-		-		+
f/g	-		+		-		+

O quadro nos mostra que o quociente é negativo para os valores de x "antes" do 1 e para os valores de x entre $2\ e\ 4$. O numerador (função f) é NULO em $x = 1\ e\ x = 2$. Como a inequação pede os valores de x em que o quociente é menor ou igual a zero, temos que estes dois valores entram na solução. Já $x = 4$ não será solução, pois, neste caso, o denominador será nulo, o que não pode ocorrer. Desse modo, vemos que o solução da inequação será :

$S = \{x \in R / x \leq 1\ ou\ 2 \leq x < 4\}$.

3) Segundo Método : Análise da Função-denominador

Já analisamos o sinal da função $g(x)$ e vimos que ela é POSITIVA para $x > 4$, NEGATIVA para $x < 4$ e NULA para $x = 4$. Vamos, então, separar a resolução da inequação em casos.

Primeiro Caso : $\boldsymbol{x} > 4$. Nesse caso, temos que $g(x) = x - 4$ é positiva. Podemos, então, multiplicar ambos os membros da desigualdade por $(x - 4)$ sem invertê-la, e teremos :

$$\frac{x^2 + 2x - 18}{x - 4} \times (x - 4) \leq 5(x - 4) \rightarrow x^2 + 2x - 18 \leq 5x - 20 \rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

Já fizemos o estudo desta função e vimos que ela é menor ou igual a zero para $1 \leq x \leq 2$. Porém, a solução encontrada só seria válida se estivesse na região da reta em que $x > 4$. Logo, para achar a solução neste intervalo, devemos fazer a INTERSEÇÃO da solução encontrada com a região da reta em que ela seria válida. Como não há interseção entre os intervalos $x > 4$ e $1 \leq x \leq 2$, concluímos que a inequação não possui nenhuma solução maior que 4.

Segundo Caso : $\boldsymbol{x} < 4$. Neste caso, devemos inverter a desigualdade ao multiplicar ambos os membros por $g(x)$, pois a função será negativa neste intervalo. Assim :

$$\frac{x^2 + 2x - 18}{x - 4} \times (x - 4) \geq 5(x - 4) \rightarrow x^2 + 2x - 18 \geq 5x - 20 \rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

A solução da inequação acima é $x \leq 1 \; ou \; x \geq 2$. Mas só são válidas as soluções obtidas menores que 4. Fazendo a INTERSEÇÃO com o intervalo $x < 4$, obtemos $x \leq 1 \; ou \; 2 \leq x < 4$.

Terceiro Caso : $\boldsymbol{x = 4}$. Este número não é solução da inequação, pois faz com que o denominador se anule.

A solução geral da inequação é obtida UNINDO-SE as soluções encontradas nos três casos. Logo : $S = \{x \in R / x \leq 1 \; ou \; 2 \leq x < 4\}$, como obtido na resolução anterior.

Vamos resolver por este método a inequação $\frac{2x-1}{5x+2} > 4$.

Primeiro Caso : $\boldsymbol{x > -\frac{2}{5}}$. Neste caso, o denominador é positivo e podemos multiplicar ambos os membros da desigualdade por $(5x+2)$ sem invertê-la :

$$\frac{2x-1}{5x+2} > 4 \rightarrow 2x - 1 > 4(5x+2) \rightarrow 2x - 1 > 20x + 8 \rightarrow -18x > 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 18x < -9 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Porém, só são válidos como solução os valores de $x < -\frac{1}{2}$ que se encontram dentro do intervalo $x > -\frac{2}{5}$. A interseção dos dois intervalos é vazia. Logo, não há soluções maiores que $-\frac{2}{5}$.

Segundo Caso : $\boldsymbol{x < -\frac{2}{5}}$. Neste caso, o denominador é negativo e a desigualdade deve ser invertida ao se multiplicar ambos os membros por $(5x+2)$:

$$\frac{2x-1}{5x+2} > 4 \rightarrow 2x - 1 < 4(5x+2) \rightarrow 2x - 1 < 20x + 8 \rightarrow -18x < 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 18x > -9 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

A interseção do intervalo obtido com a condição do segundo caso é : $-\frac{1}{2} < x < -\frac{2}{5}$.

Terceiro Caso : $\boldsymbol{x = -\frac{2}{5}}$. Este valor não é solução, pois anula o denominador.

A união das soluções obtidas nos três casos forma o conjunto $S = \left\{x \in R / -\frac{1}{2} < x < -\frac{2}{5}\right\}$, que é a solução geral da inequação.

4) Comentários

Os dois métodos de solução de uma inequação-produto podem ser apresentados e trabalhados com os alunos do ensino médio. O primeiro é apresentado nos livros didáticos. O segundo pode ser dirigido sob forma de trabalho ou seminário, para que os próprios alunos apresentem-no e discutam-no, sempre com a orientação do professor. O segundo método instiga os estudantes a terem uma postura mais crítica em relação à matemática, não apenas repetindo procedimentos mecânicos, mas indagando em que circunstâncias eles são válidos.