****

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO - NÍVEL ESPECIALIZAÇÃO -"LATU SENSU" PRÁTICAS PEDAGÓGICAS INTERDICIPLINARES COM ÈNFASE EM MATEMÁTICA**

**IARA VICTORINO DE SOUSA**

**ENSINO APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE SOBRE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICO CULTURAL**

**CRICIÚMA, SC**

**2014**

**IARA VICTORINO DE SOUSA**

**ENSINO APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE SOBRE UMA PERSPECTIVA HISTORICO CULTURAL**

Projeto de pesquisa elaborado para cumprimento da disciplina de Metodologia da Pesquisa Científica, solicitado pela professora Ma. Giana Remus, no Programa de Pós-Graduação nível Especialização em Práticas Pedagógicas Interdisciplinares com Ênfase em Matemática da Faculdade Dom Bosco.

Orientadora: Ma. Terezinha Vicenti

Criciúma, SC

2014

IARA VICTORINO DE SOUSA

**ENSINO APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE SOBRE UMA PERSPECTIVA HISTORICO CULTURAL**

Monografia apresentada ao programa de Pós-Graduação da Faculdade Dom Bosco como requisito para a obtenção do Título de Especialista em Práticas Interdisciplinares com ênfase em Matemática: Metodologia do Ensino da Matemática.

Orientadora: Ma. Terezinha Vicenti

CRICIÚMA, SC\_\_/\_\_/\_\_. Nota\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 Orientador: Prof..................................

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Coordenador do curso

Criciúma, SC

2014

**RESUMO**

O presente trabalho foi realizado por meio de uma pesquisa bibliográfica seguindo a abordagem histórico cultural, irá apresentar um estudo sobre o conteúdo de proporcionalidade e terá como objetivo, analisar os livros didáticos matemáticos utilizados pela rede de ensino, com o intuito de verificar qual a metodologia utilizada atualmente pelas escolas públicas para aplicação do referido conteúdo. Com isso, buscamos auxilio nos livros de autores matemáticos, utilizando como embasamento o conteúdo de proporcionalidade e fazendo assim uma comparação com os livros didáticos. Sempre procurando ter como objetivo primordial encontrar uma metodologia de ensino que atenda aos pressupostos da abordagem histórico cultural, com intuito de promover maior aprendizagem quanto ao referido conceito.

**Palavras Chave:** Proporcionalidade, matemática, comparação, livros didáticos, abordagem histórica cultural.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES



Iluistração 01:Unidade de medida

Iluistração 02:Multiplicação

SUMÀRIO



[1 INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA 7](#_Toc390861209)

[2 REFERENCIAL TEÓRICO: ABORDAGEM HISTÓRICO-CULTURAL 8](#_Toc390861210)

[2.1 O Conceito de Proporcionalidade nos Livros Didáticos 14](#_Toc390861211)

[2.1.1 Livro didático “novo praticando matemática” de Andrini e Vasconcelos (2002) 14](#_Toc390861212)

[2.1.2 Livro didático “A conquista da matemática” de Giovanni e Castrucci (2009) 16](#_Toc390861213)

[2.1.3 Livro didático “Matemática” de Imenes e Lellis (1997) 19](#_Toc390861214)

[2.1.4 Livro didático “Tudo é matemática” de Dante (2009) 25](#_Toc390861215)

[2.2 CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-CULTURAL 27](#_Toc390861216)

[3 DISCUSSÕES SOBRE O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE EM PESQUISAS MATEMÁTICAS 30](#_Toc390861217)

[4 CONCLUSÃO 35](#_Toc390861218)

[5 REFERÊNCIA 36](#_Toc390861219)

# 1 INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

O presente trabalho irá apresentar um estudo sobre o conteúdo proporcionalidade das escolas de Ensino Fundamental séries finais. De modo que seu foco principal é elaborar uma metodologia de ensino que seja eficaz no sentido de construir o conhecimento lógico e pensamento matemático no educando.

Para tanto, foi necessário analisar alguns livros didáticos e matemáticos utilizados pela rede de ensino, com intuito de verificar qual a metodologia utilizada atualmente pelas escolas públicas para a aplicação do referido conteúdo. Com isso, percebeu-se que os procedimentos utilizados para o ensino de proporcionalidade eram mecânicos e regrados, de modo a não ser eficaz na construção do conhecimento.

Diante disso, buscamos auxílio nos livros de autores estudiosos matemáticos para chegar ao foco do trabalho. Assim foi necessário buscar pelos pressupostos da abordagem Histórica Cultural e nela observou-se que o conceito de proporcionalidade depende inteiramente de os alunos terem internalizados os conceitos de multiplicidade e divisibilidade.

O objetivo da pesquisa seria a elaboração do conceito teórico de proporcionalidade de modo que desenvolva o pensamento matemático no educando, e assim colocar o aluno em ação investigativa, estabelecer a relação entre os conceitos matemáticos segundo a Abordagem Histórica Cultural e elaborar situações problema que partem do geral para o particular.

# 2 REFERENCIAL TEÓRICO: ABORDAGEM HISTÓRICO-CULTURAL

Com base nos estudos realizados por Davydov (1988) na história da psicologia, muitas teorias tiveram seu início estimulado pela falta de métodos de ensino que fossem capazes de solucionar os problemas encontrados durante a produção do conhecimento. Cada teoria teve seu embasamento firmado durante as práticas educacionais e nas aplicações das mesmas. Segundo o referido autor, essas teorias podem ser classificadas em duas maneiras diferentes de conceber a forma de pensamento; a primeira, afirma que o desenvolvimento mental de cada ser humano acontece independentemente do meio em que ele está inserido, ou seja, o intelecto parte do indivíduo, não sofrendo influência do ensino e da educação. Já a segunda afirmar o contrário da primeira, dizendo que há sim, grande influência do ensino e da educação no desenvolvimento mental de cada indivíduo.

Para Davydov (1988), as práticas pedagógicas realizadas nas instituições estão de certa forma, ligadas a essas teorias, na qual, os educadores práticos que se orientam por essas metodologias, tendem a realizar algumas das proposições de um ou outro destes dois grupos, influenciando diretamente no processo de desenvolvimento do indivíduo.

Sendo assim, dependendo da teoria a qual o ensino se apoia, desenvolve-se uma forma de pensamento, que de acordo com o referido autor se diferenciam em dois tipos: o pensamento empírico, que define “[...] orientado a separar e registrar os resultados da experiência sensorial”, (p. 106); e, o pensamento teórico, que consiste “em revelar a essência dos objetos, as leis internas de seu desenvolvimento”. (p.106).

Segundo Sforni (2004, p.29), “a escola traz arraigados modos de conduta, pensamentos e relações que se auto reproduzem”. Tais concepções como as inatistas e a ambientalistas fazem-se presente não apenas nas escolas, mas também se manifestam socialmente, transformando-se numa espécie de senso comum do que seja ensinar e aprender. (Idem).

Assim, a forma de pensamento produzida por tais concepções já faz parte das concepções do futuro professores muito antes de seu ingresso nos cursos de formação.

Nesse sentido, Davydov (1982) afirma que o papel da escola é desenvolver o pensamento teórico das crianças por meio da apropriação dos conhecimentos científicos, em detrimento do pensamento empírico. Por isso diz ser de responsabilidade do ensino escolar a função de criar as condições e premissas necessárias para o desenvolvimento do pensamento teórico. Para tanto, é necessário uma organização e mediação educacional, que estimulem o desenvolvimento da consciência da criança. Partindo desse princípio, a teoria norteadora da presente pesquisa é a Abordagem Histórica Cultural, cujo precursor é Vygotsky.

De acordo com Nuñes (2009, p.18) nessa teoria, “as capacidades humanas não são inatas, mas se desenvolvem durante a vida e se formam durante o processo de assimilação da experiência das gerações anteriores”. Logo, essa concepção permite afirmar o caráter de mediação cultural do processo do conhecimento, no qual o ensino sofre historicamente a intervenção da atividade humana. Desse modo:

[…] a atividade humana não pode existir a não ser em forma de ações ou grupos de ações que lhes são correspondentes. A atividade laboral se manifesta em ações laborais, a atividade didática em ações de aprendizagem, a atividade de comunicação em ações de comunicação e assim por diante. (LIBÂNEO e FREITAS, 2006, p. 4).

Contudo, o presente estudo tem seu foco na atividade didática em ações de aprendizagem, visto que toda atividade humana surge de determinada necessidade, “que deriva sua concretização na diversidade de motivos que exigem das crianças a execução de ações de aprendizagem” (DAVYDOV, 1988, p.138).

Essas ações de aprendizagem terão seu êxito somente se suas práticas pedagógicas resultarem de um “programa, que determina o conteúdo da matéria escolar, determina também os métodos de ensino, a natureza do material didático, o período do ensino e outros elementos do processo” (DAVYDOV, 1988, p. 58).

Nesse sentido, a elaboração de um programa pedagógico e a escolha dos conteúdos escolares não estão atrelados apenas aos fatores psíquicos, mas também aos elementos histórico-cultural desenvolvidos pela humanidade. Partindo desse contexto, Davydov, (1988, p. 62) diz que:

Ensino e a aprendizagem são os meios através dos quais os adultos organizam a atividade das crianças e na sua implementação reproduzem em si mesmos as necessidades surgidas historicamente, essenciais para a solução exitosa das diferentes tarefas da vida produtiva cívica (DAVYDOV, 1988, p. 62).

Vygotsky (2001) defende que, no processo de aprendizagem, é fundamental ensinar a criança a pensar, em vez de ensinar esse ou aquele conhecimento (FACCI, 2004, p.177). Por tanto, Nuñes (2009, p.26) parte da ideia de que a aprendizagem como atividade transformadora tem caráter mediatizado por instrumentos, ou seja, ferramentas que se interpõe entre o sujeito e o objeto de atividade. Assim, esse processo de mediação acontece por meio da intervenção de objetos numa relação mútua entre o objeto e o sujeito, fazendo com que estas se prevaleçam sobre as relações diretas.

De acordo com Sforni (2004, p. 34) Vygotsky destaca o instrumento e o signo como elementos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento. Ambos os elementos são responsáveis pela mediação de todo o processo de conhecimento. O instrumento serve como condutor da ação humana sobre o objeto e permitindo ampliar a ação do homem sobre a natureza, e sobre si mesmo. O signo atua no sentido inverso:

Poder-se-ia que a característica básica do comportamento humano em geral é que os próprios homens influenciam sua relação com o ambiente e, através desse ambiente, pessoalmente modificam seu comportamento, colocando-o sob seu controle. (VIGOTSKY, 1999 apud SFORNI, 2004, p. 34).

É por meio do processo de mediação que o ser humano desenvolve o conhecimento científico para analisar o significado dos conceitos. A definição desses conceitos pode surgir de duas maneiras diferentes: de forma cotidiana e/ou científica. Ambos os conceitos estão atrelados, mas possuem divergências quando se determina suas dinâmicas. O conceito científico é adquirido de maneira formal e o conceito cotidiano surge das relações do dia a dia e por noções intuitivas. Segundo Vygotsky (1993, p.253) o conceito cotidiano:

Cria uma série de estruturas necessárias para que surjam as propriedades inferiores e elementares dos conceitos. Por sua vez, o conceito científico, depois de ter percorrido de cima para baixo certo fragmento de seu caminho, abre espaço para o desenvolvimento dos conceitos cotidianos, preparando de antemão uma série de formações estruturais necessárias para dominar as propriedades superiores do conceito.

Os conceitos cotidianos se relacionam aos científicos uma vez que se faz necessário o domínio do conceito cotidiano por parte do aluno para facilitar a apropriação do conceito científico. Esse movimento se trata de uma unidade dialética em que o desenvolvimento do conceito está interligado ao cotidiano e ao científico, e que o amadurecimento conceitual acontece na reflexão de ambos, determinando o limite das percepções cotidianas (concreto sensorial) e o desenvolvimento do pensamento científico (concreto pensado).

No entanto, o conceito científico não surge apenas da apropriação do conceito cotidiano, mas se desenvolve na sala de aula com “o trabalho para o desenvolvimento dos conceitos científicos deve começar por procedimentos analíticos, pela sua definição verbal, por evidências de atributos e ideias essenciais subjacentes a eles e pelas suas aplicações às variedades de objetos e situações da realidade. ” (DAMAZIO, 2000, p. 56).

 Da inter-relação entre os conceitos espontâneos e os conceitos científicos surge a relação entre desenvolvimento e a aprendizagem. Da reciprocidade dessa relação e com articulação direcionada, todo processo culmina no desenvolvimento mental do aluno. Foi partindo dessas relações que Vygotsky (1999, p. 112-113) deu a seguinte explicação para a zona de desenvolvimento proximal:

Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (...) A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas de “brotos” ou “flores” do desenvolvimento, ao invés de “frutos” do desenvolvimento.

Logo, segundo Joenk (2005), a zona de desenvolvimento real indica processos de desenvolvimento que já estão internalizados na criança, ou seja, aquilo que a criança já domina, ou seja, que ela traz consigo para a sala de aula. Já o nível de desenvolvimento potencial está relacionado às capacidades que o aluno possui de executar determinadas tarefas por meio da imitação, com a ajuda de alguém mais experiente. “Nesse sentido, aquilo que é zona de desenvolvimento proximal hoje, será nível de desenvolvimento real amanhã. ” (JOENK, 2005, p.8).

Para Damásio, essa mediação promove a elaboração de conceitos por parte do educando, ou seja, o desenvolvimento do pensamento matemático. Segundo Vigotski (2001, p. 226):

O conceito surge quando uma série de atributos abstraídos torna a sintetizar-se, e quando a síntese abstrata assim obtida se torna forma basilar de pensamento com o qual a criança percebe e toma conhecimento da realidade que a cerca.

A formação de conceitos passa por três estágios. “O primeiro estágio, conceito sincrético, se caracteriza quando a criança percebe e forma uma única imagem que, em seu entendimento, não pode ser desmembrada. ” (DAMAZIO, 2006, p.2). Esse estágio é caracterizado pelo pensamento caótico, onde não há capacidade de fazer relação entre objetos por parte do aluno.

Para Damásio (2006, p.2) “o segundo estágio - conceito por complexos – tem como características: a formação de vínculos entre objetos; estabelecimento de relações entre diferentes impressões concretas; direcionamento à unificação e à generalização de objetos particulares, como também ao ordenamento e sistematização de toda experiência da criança”.

Esse nível de pensamento apresenta-se em diversas fases, ou seja, complexo: associativo, coleção, em cadeia, difuso, pseudoconceito. É nesse estágio que a criança começa a estabelecer relações entre os objetos, ela consegue organizá-los por cor, tamanho, forma, entre outras maneiras de unificar os vínculos existentes entre qualquer objeto. Vigotski entende essa fase como “aritmética variada”, pelo fato de formar essas relações de forma empírica.

Por fim, o último estágio, conhecido como o estágio dos conceitos propriamente ditos, em que o ser humano desenvolve o pensamento pela análise/abstração e a síntese/generalização. Numa primeira fase, a criança, por exemplo, agrupa objetos por um único traço (genuíno) com a especificação do mesmo. Na segunda fase, conceitos potenciais, a criança destaca um grupo de objetos e generaliza depois de reunidos segundo um atributo comum. Finalmente, a terceira fase, conceitos verdadeiros, a palavra tem um papel decisivo, sendo usada e aplicada com significações bem definidas. (DAMAZIO, 2006, p.2).

## 2.1 O Conceito de Proporcionalidade nos Livros Didáticos

Segundo Ruggiero e Basso (2003) os livros didáticos podem se constituir como instrumentos mediadores para auxiliar o educando a se apropriar do saber erudito[[1]](#footnote-1). No entanto, isso só será possível se os livros didáticos “forem de fato objetivações do saber acumulado pela humanidade e sua utilização for conduzida pelo professor”. (MAZZEU, 1997 apud RUGGIERO, BASSOS, 1997, p. 21).

Há de ressaltar a importância da utilização do livro didático no processo de ensino e aprendizagem do aluno, porém este não pode substituir o papel do professor como partícipe no processo de ensino e aprendizagem, sendo este possuidor de conhecimento maturado e dotado de intencionalidade. Assim, cabe ao professor planejar e orientar o ensino de modo a garantir a aprendizagem que levará ao desenvolvimento do educando.

Nesse sentido, achamos pertinentes para o nosso objeto de estudo analisar alguns livros didáticos correspondentes a 6ª série/7°ano do Ensino Fundamental séries finais, a respeito da abordagem sobre o conceito de proporção e sua inter-relação com outros conceitos.

### 2.1.1 Livro didático “novo praticando matemática” de Andrini e Vasconcelos (2002)

O conceito de proporção é definido pelos autores como a igualdade entre razões, no qual essa característica deriva da teoria das proporções de Eudóxio.

No capítulo 2 e 3 do livro os autores trazem em seu contexto o significado de grandeza e o modo como compará-las, para assim encontrar a razão. Para tanto, trabalham com grandezas diretamente e inversamente proporcionais, utilizando situações do cotidiano que envolva noções de proporcionalidade.

Para melhor compreensão, apresentaremos uma situação problema, enunciado na página 34 do referido livro.

“Num jardim há cravos e rosas na razão de 8 para 11. Há 88 rosas. Descubra qual é o número de cravos existente no jardim”.

Solução explicitada pelos autores nos exercícios resolvidos:

Chamaremos de x o número de cravos.

Então: $\frac{8}{11}=\frac{x}{88}$· Usando a multiplicação em cruz calculando $11.x=8.88$ (x vezes onze é igual a oito vezes oitenta e oito).

Assim, usando a multiplicação $11. x=704$e, usando a divisão $x=\frac{704}{11}$.

Encontramos que $x=64$ cravos.

Nota-se, que o procedimento adotado pelos autores, recai no algoritmo da regra de três, pois não se estabelece relações entre as grandezas envolvidas no problema. As relações multiplicativas são abordadas como um procedimento mecânico e imediato (multiplicação em cruz) na qual a tarefa do aluno se reduz apenas a encontrar os números no problema e a operar com eles, sem necessariamente estabelecer relações que propiciem o desenvolvimento do raciocínio proporcional [[2]](#footnote-2). (OLIVEIRA; SANTOS, 2000).

Nesse sentido, o conceito de proporcionalidade não deve se reduzir apenas na aplicação de algoritmos (números) como foi visto anteriormente (regra de três), mas deve consistir no processo de desenvolvimento do conceito envolvendo o estudo de raciocínio proporcional, possibilitando assim, a compreensão do conceito de forma inter-relacionada com os demais conceitos matemáticos (como medidas, estatística, aritmética, função, álgebra e geometria) e não como procedimentos isolados.

De acordo com Sipinillo (2002, apud SILVIA, 2008, p. 51), “a representação e o uso do algoritmo isoladamente não garantem por si só a compreensão do significado das relações envolvidas no conceito”.

Assim, para Davydov (1988) o conteúdo analisado fora de certo sistema sem estabelecer relações com outros conceitos promove no educando o desenvolvimento do pensamento empírico.

### 2.1.2 Livro didático “A conquista da matemática” de Giovanni e Castrucci (2009)

A abordagem do tema proporcionalidade é apresentada nos últimos capítulos, na qual explicitaremos em três momentos.

O primeiro momento consiste no estudo do conceito de razão, em que os autores introduzem a ideia de razão por meio de situações problemas, como no exemplo:

1). No treino de vôlei... A cada 10 saques Cláudia errou 9.

“Para comparar o número de saques que não deram certo com o total de saque de Cláudia, podemos usar uma fração”:

$$\frac{númerodesaqueserrados}{totaldesaques} =\frac{9}{10}$$

“Então, que fração representa a comparação entre o número de saques que Cláudia acertou e número total de saques realizados? ”. (p.233-234).

$$\frac{númerodesaquescertos}{totaldesaques} = \frac{1}{10}$$

Logo, a seguir, generalizam dizendo:

Sendo **a** e **b** dois números racionais, com $b\ne 0$, denomina-se **razão entre a e b ou razão de a para b** o quociente $\frac{a}{b}$ ou $a:b$.

Percebe-se que, Giovanni e Castrucci (2009) cometem um equívoco ao generalizar a ideia de razão ($\frac{a}{b}$$\frac{a}{b}$ ainda $a: b)$, partindo da representação de fração sem atribuir a está o significado do conceito. Pois, segundo Botta (1997, apud RUGIERRO, BASSO, 2003, p.24) entende-se que, “a noção de fração (relação parte- todo) é semanticamente distinta da noção de razão (relação parte-parte) embora ambas sejam expressas pela mesma notação$\frac{a}{b}$ com b 0”.

Desse modo, ao trabalhar com as grandezas especiais (velocidade média escala, densidade demográfica e densidade de um corpo) aplica-se a ideia de razão sem estabelecer relação entre as grandezas, ou seja, a noção de fração é utilizada como sinônimo da ideia de razão.

No segundo momento é abordada a ideia de proporção. Os autores definem proporção como sendo uma igualdade entre duas razões. Assim, espera-se que o aluno ao observar uma situação problema possa identificar o princípio de igualdades entre ambas e se certificar quanto a sua grandeza, ou seja, se ela é diretamente proporcional ou inversamente proporcional.

Desse modo, ao estabelecer a relação: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow a. d=b. c$ , utiliza a propriedade para determinar a **quarta proporcional,** que consiste em encontrar um valor desconhecido (uma incógnita). Assim, mais uma vez, verifica-se a ausência do raciocínio proporcional, em que a relação de multiplicidade é reduzida apenas ao procedimento de cálculo de regra de três, pois o que se observa no decorrer do contexto é a repetição e aplicação de procedimentos já prontos (o produto dos extremos é igual ao produto dos meios).

Num terceiro momento apresenta-se a porcentagem como um procedimento de cálculo, a qual contempla respectivas formas decimais, relacionando a expressão por cento (%) com a razão de consequente 100. Como podemos verificar na tabela a seguir:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Taxa Percentual | Razão Percentual | Forma Decimal |
| 80% | 80/100 | 0,80 |
| 40% | 40/100 | 0,40 |

Assim, o símbolo % (por cento) reduz a forma decimal para se calcular um valor sobre uma determinada quantia. Exemplificando:

“Comprei 60 figurinhas. Aproveite 75% dessas figurinhas e coloquei no meu álbum. Quantas figurinhas eu colei no álbum? ”.(p.295).

* Pelo problema, devemos achar o número que representa 75% (setenta e cinco por cento) de 60.
* Representando esse número por x, temos:

x = 75% de 60

Como 75% = 0,75, fazemos:

x = 0,75 de 60 = 0,75. 60 = 45

Logo, colei 45 figurinhas no meu álbum.

Observou-se que o processo ocorre de modo linear, pois ao desenvolver cada procedimento não se especifica a relação (parte-todo), que dá a noção de fração (representação fracionária = forma decimal).

### 2.1.3 Livro didático “Matemática” de Imenes e Lellis (1997)

Em artigo publicado na Revista Bolema (ano 16, nº20, 2003) as autoras Ruggiero e Basso, fazem uma crítica quanto à ausência do raciocínio proporcional (lógica conceitual) em relação ao conceito de porcentagem.

O tema proporcionalidade é apresentado no capítulo 5 do livro, em que Imenes e Lellis (1997) iniciam introduzindo as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, pois acreditam que a essência da relação de proporcionalidade está nas relações multiplicativas, a qual adota a seguinte caracterização.

Duas grandezas A e B são diretamente proporcionais se duplicando um valor de A, duplica o valor correspondente de B e, assim por diante. Generalizando multiplicando-se um valor de A por qualquer número k, o mesmo acontece com o valor correspondente de B.A caracterização de grandezas inversamente proporcionais é análoga. Nesse caso, multiplicando-se um valor de A por qualquer número $K\ne 0$, o valor correspondente de B fica dividido por K. (IMENES; LELLIS, 2005, p. 20).

Essas definições encontram-se implícitas nas situações problemas propostos pelos autores, na qual se tornam ponto de partida para iniciar a construção de ideias sobre proporcionalidade.

No caso das grandezas diretamente proporcionais os autores iniciam com uma situação problema do tipo:

“Certo helicóptero pode percorrer 150 km em 0,5h. Mantendo essa velocidade, quantos quilômetros ele percorrerá em 2h?”. (p.126)

Solução explicitada de acordo com os autores.

Primeiramente organizam-se as informações do problema, que nesse caso foi expresso por meio de uma tabela.

|  |  |
| --- | --- |
| TEMPO (h) | DISTÂNCIA (Km) |
| 0,5 | 150 |
| 2,0 | ? |

|  |  |
| --- | --- |
| TEMPO (h)x 4 | DISTÂNCIA (Km)x 4 |
| 0,5 | 150 |
| 2,0 | 600 |

Para concluir o raciocínio, os autores elaboram uma fala: “Agora, note que, de 0,5 para 2,0h, o tempo foi multiplicado por 4. Como o tempo e a distância são diretamente proporcionais, você pode preencher a tabela e resolver o problema”. (p.127).

Para introduzir as grandezas inversamente proporcionais Imenes e Lellis (1997) iniciam do mesmo modo que as grandezas diretas proporcionais, partindo dos seguintes problemas:

“Osamo tem 32 exercícios de Língua Portuguesa para fazer! ”

- Se eu fizer 8 exercícios por horas vou gastar 4 horas.

- Mas se eu fazer 16 por hora eu gasto 2 horas.

-Se eu fizer 32 por hora gasto 1 hora só.

- Decidido! Faço tudo em uma hora. É só não ligar a TV entre um exercício e outro.

“Ele tomou a sábia decisão de não assistir à TV enquanto faz a lição. Assim, terminará mais rapidamente. E você pode ter percebido uma novidade: a proporcionalidade inversa. Veja só”: (p. 136).

|  |  |
| --- | --- |
| **Quantidade de exercícios** | **Tempo (h)** |
| 8 | 4 |
| 16 | 2 |
| 32 | 1 |

Assim, concluem dizendo ser esse um caso de grandezas inversamente proporcionais: em que, “se a primeira dobra, a outra se reduz à metade, se a primeira triplica, a outra reduz à terça parte assim por diante”. (p.136).

Um dos aspectos que gerou a crítica foi à questão da dicotomia entre o tema proporcionalidade e tema porcentagem. Segundo Ruggiero e Basso (2003) o tema porcentagem não é mencionado em nenhum problema ou exercício do capítulo sobre proporcionalidade, do mesmo modo este não é mencionado no capítulo sobre porcentagem. Assim, os autores acreditam que houve uma desarticulação de conteúdo, considerando que ambos possuem a mesma lógica conceitual.

O tema porcentagem só aparece no capítulo 10, sem apresentar devida sistematização, ou seja, “a porcentagem não chega a ser desenvolvida de forma sistematizada e articulada, de modo a se relacionar com os conhecimentos espontâneos que o aluno possui sobre proporcionalidade”. (RUGGIERO, BASSO, 2003, p. 26).

Portanto, ao elaborar um conceito é imprescindível estabelecer vínculos com demais conceitos e conhecimentos que estão interligados ao mesmo processo conceitual.

A definição do conceito de porcentagem é apresentada na página 298 por meio do Dicionário Ilustrado [[3]](#footnote-3)conforme a seguir:

**Porcentagem**

Parte de um total imaginado como 100% (cem por cento). Assim, 20% indicam 20 partes das 100 partes de um total. Por isso, 20% é igual à fração $\frac{20}{100}$ e também, é igual ao número decimal 0,20. Pode-se calcular 20% de um total **T.** Portanto, 20% de $R\$30,00$é igual a $R\$6,00$.

Para Ruggiero e Basso (2003, p.29-30) a definição trata-se de um procedimento de cálculo, consistindo na aplicação de uma taxa percentual a um determinado valor fornecido, sem desenvolver o raciocínio proporcional, ou seja, não comparando as razões envolvidas no problema. Assim na opinião dos autores:

Porcentagem continua sendo tratada como um fim em si mesmo, completamente desconectado dos outros conteúdos, sem abordar o princípio fundamental da proporcionalidade como ideia unificadora das relações multiplicativas.

Logo, Imenes e Lellis (1997) não expressam explicitamente o fundamento da lógica do conteúdo, que para Ruggiero e Basso (2003, p. 31) “seria o pensamento proporcional, cujo conhecimento os alunos já possuem, de modo espontâneo, desde pequenos, e de modo sistematizado, por meio das operações multiplicação e divisão, já aprendidas na escola”.

Em artigo, também publicado na Revista Bolema (ano 18 - nº24 - 2005) os autores Imenes e Lellis fazem uma crítica da crítica, com o objetivo de contestar análise realizada por Ruggiero e Basso (2003), pois acreditam que algumas das concepções que norteiam seu trabalho são distintas das adotadas pelas autoras. Assim, julgam ser inconvenientes ao generalizar tais conclusões com base apenas em um capítulo do livro, não considerando o trabalho desenvolvido ao longo de oito anos e que se constitui por oito volumes.

Como justificativa Imenes e Lellis (2005) afirmam que por ser sua obra elaborada sob outra perspectiva, diferente do padrão usual e que não faz uso da linearidade de conteúdo (sequência didática).

A sequência didática, usual, relativa à proporcionalidade, apresenta os seguintes estágios:

1. Definição de razão;
2. Definição de proporção; como informam as autoras. “A proporção é definida matematicamente como igualdade de duas razões”. (RUGGIERO; BASSO, 2003, p.24);
3. Definição de grandezas proporcionais:

A grandeza “A” é diretamente proporcional à B se ambas variam na mesma razão, ou, mais detalhadamente, se dados os valores a1, a2 de A e os valores correspondentes b1, b2 de B, os quatro valores formarem a proporção $\frac{a\_{1}}{a\_{2}}=\frac{b\_{1}}{b\_{2}}$.

Além disso, “A” é inversamente proporcional a B, se ambas variam em razões inversas, ou mais detalhadamente, se os valores a1, a2, b1 e b2 formarem $\frac{a\_{1}}{a\_{2}}=\frac{b\_{2}}{b\_{1}}$.

Portanto, de acordo com Imenes e Lellis (2005, p. 14) “tais noções não precisam ser expostas de maneira tão sintética, podendo-se usar recursos que as tornem mais acessíveis ao entendimento matemático dos jovens de 11 e 13 anos”.

No caso da porcentagem, ao invés de utilizar igualdades entre razões, interpretam **a%** comum operador para se efetuar cálculos com porcentagem buscando explorar principalmente a conexão com números decimais (13%=0,13), mas também com frações e com proporcionalidade.

Exemplificando (IMENES; LELLIS, 1997, p.228):

12 em 25?

É o mesmo que 24 em 50... E que 48 em 100.

Então, 12 é 48% de 25.

Nesse sentido, discordam das autoras quando dizem que a porcentagem não foi sistematizada, pois acreditamos ter sistematizado ao descrever as operações determinadas pelo operador porcentual. (IMENES; LELLIS, 2005).

Diante do diálogo estabelecido entre as autoras Ruggiero e Basso (2003) e os autores Imenes e Lellis (2005), há de ressaltar que ambas as críticas são pertinentes. Pois ao analisarmos a proposta de Imenes e Lellis (1997), acreditamos que tal proposta desenvolve o raciocínio proporcional, ao estabelecer relações entre grandezas ou variáveis.

No entanto, essa ideia encontra-se implícita nas situações problemas propostos pelos autores, pois afirmam que, “quem deve encontrar a forma de resolução são os alunos, pois o texto didático não ‘dá nada pronto’ e recomenda-se ao professor que também não o faça”. (IMENES; LELLIS, 2005, p.21-22).

Assim, buscando superar os procedimentos mecânicos, como a regra de três, por exemplo, acabam deixando para o aluno a responsabilidade de compreender a forma como este conceito se apresenta, sem ao menos estabelecer a relação entre os conceitos de proporcionalidade, porcentagem e regra de três; já que estes possuem a mesma lógica conceitual.

### 2.1.4 Livro didático “Tudo é matemática” de Dante (2009)

A ideia de proporcionalidade está presente no capítulo 8, na qual o autor aborda o tema de forma abrangente. Ou seja, inicia o estudo com a ideia de razão (mostrando as diversas formas de representá-la), e uma breve representação de porcentagem como razão (ou seja, porcentagem é a razão que tem o consequente igual a 100). Logo após, traz a ideia de proporção, cuja expressão de modo geral consiste:

Se duas razões são iguais, elas formam uma proporção. Assim, se “a razão entre os números **a** e **b** é igual à razão entre os números **c** e **d**, dizemos que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ é uma proporção” (DANTE, 2009, p. 196). Também aborda as propriedades da proporção, na qual considera como propriedade fundamental a representação simbólica: “$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow a. d=b. c$, em que o produto dos extremos é igual aos produtos dos meios” (p.197).

Faz referência às grandezas, tanto as grandezas diretamente proporcionais quanto às grandezas inversamente proporcionais, partindo de situações problemas. Em seguida, mostra como descobrir o coeficiente de proporcionalidade por meio da razão. Como mostraremos adiante:

|  |  |
| --- | --- |
| Bolos | Ovos |
| 2 | 6 |
| 4 | 12 |

“As razões entre os valores correspondentes das duas grandezas formam uma proporção: $\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$.

Simplificando $\frac{2}{6}e\frac{4}{12}$, obtemos $\frac{1}{3}$”.

Logo, $\frac{1}{3}$ é a razão de proporcionalidade ou o coeficiente de proporcionalidade entre a grandeza dada pelo número de bolos e a grandeza dada pelo número de ovos.

A regra de três só aparece explicitamente, após o autor ter trabalhado com grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Pois, a regra de três simples é introduzida a partir de situações problemas que envolvem estes tipos de grandezas.

O cálculo com porcentagem é inserido por meio da regra de três, lembrando que anteriormente o autor introduziu a porcentagem como uma razão (ou seja, para mostrar o significado do símbolo %) o que facilita o cálculo da porcentagem com regra de três. Como por exemplo: **60% de 35=?**

$$60\%=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}de 35=?35:5=7$$

$$3.7=21$$

**Logo, 60% de 35 = 21.**

$$\frac{60}{100}=\frac{x}{35}$$

$$100x=60 .35$$

$$100x=2100$$

$$x=\frac{2100}{100}$$

**Logo, 60% de 35 = 21.**

$$60\%=\frac{60}{100}=0,60=0,6$$

$$0,6 de 35=0,6 .35=21$$

**Logo, 60% de 35 = 21.**

A partir do Cálculo da regra de três, Dante (2009) busca inter-relacionar o conceito de proporcionalidade a outros conceitos como trabalhar com escalas, densidade demográfica (mapas, quantidades de habitantes numa determinada região /Geografia), velocidade média, movimento uniforme (Física), aplicação e redução de figuras e fotos, aplicação de proporcionalidade em gráficos (Geometria). E por último trabalha brevemente com regra de três compostas.

De modo geral, nos livros didáticos os conceitos matemáticos são reduzidos a uma mera apresentação simbólica, em que o raciocínio proporcional é entendido como um algoritmo de resolução e não como forma de pensamento, na qual se estabelece as relações de multiplicidade e divisibilidade constituídas nos conceitos matemáticos.

Sendo assim, o pensamento desenvolvido nos alunos é do tipo empírico, que de certa forma tem sua importância na vida cotidiana; porém, aparece “obstaculizando o caminho” quando se pretende que o educando entenda bem o conhecimento teórico.

## 2.2 CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-CULTURAL

O objetivo da presente pesquisa consiste em organizar um sistema de ensino que coloque o aluno em ação investigativa, e, que o mesmo contemple as significações aritmética, algébrica e geométrica para apropriação do conceito teórico de proporcionalidade.

Para tanto, nosso ponto de partida consiste em considerar como o lógico histórico do conceito de proporção a razão entre grandezas e o princípio de equivalência entre as mesmas.

Lintz (1999, apud DIAS; MORETTI, 2011, p.118) considera grandeza ou magnitude como “algo que pode ser aumentado, diminuído ou agregado a outros objetos da mesma espécie, como por exemplo, um segmento, uma superfície, um número […] o essencial da noção de magnitude ou grandeza é a possibilidade de fazer seus múltiplos”.

Davydov (1988) concebe a grandeza como o geral dos conhecimentos matemáticos, que segundo Rosa (2012, p.51) “é compreendido como a conexão geneticamente inicial do sistema estudado, que gera o caráter do sistema concreto”, assim, a partir dele, são deduzidas as suas particularidades.

Ao trabalharmos com grandezas faz necessário estabelecer a mesma grandeza de comparação entre o instrumento e o objeto a ser medido. Sendo que, “para medir o comprimento de um objeto, adota-se certa unidade e se calcula quantas vezes é possível repetir essa operação: o primeiro passo (aplicação) é de caráter geométrico, o segundo (cálculo) é aritmético” (ALEKSANDROV, 1976 apud ROSA, 2012, p.31). Por sua vez, a relação entre o comprimento e a unidade é de caráter algébrico.

Por tanto, há de se ressaltar a importância de adotar a mesma unidade de medida, pois “tal exigência do processo de aprendizagem se justifica por garantir, de forma mais conveniente teoricamente, as operações com os números racionais”. (TALIZINA, 1987 apud ROSA, 2012, p. 185). Afirma autora:

Essas crianças do primeiro ano escolar compreenderem que só se realiza as operações com os números obtidos de medidas com a mesma unidade, então elas compreenderão “por que é indispensável remeter-se a um denominador” comum. Ou seja, remeter-se a uma unidade de medida comum. (Idem, p. 185).

Desse modo, o instrumento de medida passa a ser a mediação que irá determinar o padrão de medida, ou seja, “a reprodução de quantas unidades de medida há na quantidade de grandezas que se quer medir” nos permite obter a medida (DIAS; MORETTI, 2011, p. 120).



Ilustração 01: Rosa, 2012, p.166

E = unidade de medida (Particular)

Logo, pretende-se a partir das relações de igualdade e desigualdade entre grandezas, representá-las na forma objetal, gráfica e literal, para assim obter o modelo de proporcionalidade.

a/b = c/d (universal)

Também, espera-se desenvolver as relações multiplicativas a. d = b.c, por meio da relação entre grandezas, adotando uma medida intermediária (MADEIRA, 2012). 



Ilustração 02: Madeira, 2012, p.89.

Segundo Madeira (2012, p.89) “é possível observar que foi construída uma unidade de medida intermediária (C) com duas unidades básicas”. Utilizando está para medir o volume de água K, “obteve-se, 3 vezes, o que corresponde a 6 vezes a unidade básica”. Ou seja: “C = 2E, K = 3C , então, K = 3. 2E ou K = 6E”. (idem, p.89).

Assim, buscaremos aprofundar nossos estudos com base na dissertação de Madeira (2012) e a tese de Rosa (2012) para podermos chegar ao ponto de chegada dessa pesquisa, ou seja, elaborar um sistema de ensino que contemple as significações algébricas, geométricas e aritméticas.

# 3 DISCUSSÕES SOBRE O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE EM PESQUISAS MATEMÁTICAS

O que se tem discutido até o presente momento é a questão do raciocínio proporcional (pensamento proporcional) em relação ao conceito de proporcionalidade.

Segundo Behr, Lesh e Post (1988, apud MIRANDA, 2009, p.21) esclarecem que o pensamento proporcional é:

[...] uma forma de pensamento matemático que envolve um senso de covariação e comparações múltiplas, bem como a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias partes de informação [...] está muito relacionado com a inferência e a predição e envolve métodos de pensamento tanto qualitativos quanto quantitativos.

Conforme Miranda (2009), o pensamento proporcional nos permite interpretar o comportamento de diversas grandezas do mundo físico, estabelecendo relações com outras áreas, além da Matemática. Por exemplo, alguns estudos na área da Física exigem raciocínio proporcional para serem desenvolvidos (densidade, velocidade, energia elétrica). Na área da Matemática é fundamental na “aprendizagem de Álgebra, Geometria e Trigonometria, na resolução de problemas multiplicativos, de porcentagem, semelhança de figuras geométricas, na análise de tabelas e gráficos de funções, etc”. (MIRANDA, 2009, p.13).

Botta (1997, apud RUGGIERO; BASSO, 2003, p.23) afirma ser “o raciocínio proporcional a ‘pedra de topo’ da aritmética das primeiras séries do ensino fundamental, é a ‘pedra angular’ de tudo que vem a seguir”. Assim justifica dizendo, que se nas series iniciais o aluno desenvolver o raciocino de fazer comparações multiplicativas, “não apresentarão tanta dificuldade ao estudar outros assuntos como equivalência de fração, conversão de medidas, pois todos esses conceitos convergem para a mesma forma de pensamento (proporcional) ”. (Idem, p. 23).

Como dito, no início do processo de escolarização, as primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com os conceitos de multiplicação, mas frequentemente esta relação não é enfatizada. A operação multiplicação “é apenas enfocada como uma ‘adição repetida’ de parcelas iguais, a qual não mostra o sentido de proporção que existe por trás desse processo”. (Fiorezeet al, s/d, p.9).

Assim, segundo Oliveira e Santos (1999, p.2):

No Brasil o estudo da proporcionalidade ocorre, muitas vezes, de uma maneira fragmentada, onde cada assunto do capítulo referente ao tema proporcionalidade é visto como objeto de estudo em si mesmo, provocando a transformação de ferramenta de resolução de objetos de estudos, o que ocorre, especificamente com a regra de três.

De acordo com Post, Behr, Lesh (2011, apud COSTA JÚNIOR, 2009, p.94) compreender o raciocínio proporcional “apenas pelas soluções de problemas de valor desconhecido é muito limitado, tendo em vista que este tipo de problema envolve soluções algorítmicas e muitas vezes desprovidas de significado”.

Como acontece quando adotamos o seguinte procedimento:

$\frac{6}{4}=\frac{x}{4}$ → $4x=24$ → $x=\frac{24}{4}$ →$x=6$

Sem estabelecer a correta relação de proporcionalidade entre as variáveis envolvidas no problema, na qual consiste em a relação:

4x = 24

x + x + x + x= 6 + 6 + 6 + 6

Tal procedimento, muitas vezes, passa despercebido na resolução de problemas, quando o objetivo é encontrar um valor desconhecido.

Nos programas do Ensino Fundamental, os tópicos de “Razões e Proporções” aparecem explicitamente apenas nos 7º e 8º anos, sempre considerados integrantes da aritmética e com estreita relação com as operações elementares.

Isso ocorre devido à tricotomia entre álgebra, geometria e aritmética, as quais não são contempladas de modo inter-relacionado com os conceitos desenvolvidos durante cada período da vida escolar.

Desse modo, a proporcionalidade é concebida como uma operação aritmética, não estabelecendo o pensamento algébrico, que de acordo com Rosa (2011, p.62) é essa forma de pensamento que deve ser priorizado na escolarização “por ser mais livre, uma vez que não depende de uma expressão aritmética determinada, portanto não faz sentido esperar para a 5ª série como sugere a PC/SC”.

De acordo com Tinoco (et al, 2011, p. 3) há quatro aspectos que justificam a importância do conceito de proporcionalidade na escola básica e sua relação com álgebra:

* Primeiro, [...] o reconhecimento do significado, no contexto real, das razões ou igualdades que podem expressar as relações presentes em cada problema pode auxiliar e muito a resolução do mesmo.
* Em segundo, [...] o fato de a proporcionalidade reger muitos fenômenos da vida, a exploração dos problemas a ela relacionados, com o foco nas relações entre grandezas variáveis, propicia a familiarização natural dos alunos com noções básicas da álgebra como as de variável e de função.
* O terceiro aspecto diz respeito ao fato de que o ensino significativo de proporções requer o uso de diversas representações, como tabelas, gráficos, desenhos e símbolos o que permite ao aluno reconhecer as relações entre as variações das grandezas envolvidas nos problemas, pensando qualitativamente [...] com noções de caráter algébrico.
* O quarto é salientado por Post, Behr e Lesh (1994) [...] afirmam que os raciocínios com proporções envolvem: um senso de covariação, comparações múltiplas, predição, inferência e a capacidade de armazenar e processar mentalmente informações, que são raciocínios inerentes a utilização do pensamento algébrico e a construção do conceito de variável, que merece atenção especial.

Nesse caso, ao tratarmos o conceito de proporção em sua totalidade como a relação entre grandezas variantes, torna-se possível generalizar e desenvolver assim o pensamento algébrico. Pois, de acordo com Vygotsky (2000, apud ROSA, 2012, p.131) “a aprendizagem da álgebra liberta o pensamento das dependências numéricas concretas e eleva a um nível mais generalizado”.

# 4 CONCLUSÃO

As dificuldades no Ensino da matemática são evidenciadas frequentemente ao falar de problemas da educação.

E com isso a pesquisa foi essencial para o aprendizado, pois serviu de base para compreendermos e analisarmos a forma como o conceito de proporcionalidade que é abordado pelos livros didáticos brasileiros.

Nesse sentido, constatou-se que o conceito de proporcionalidade é apresentado nos livros didáticos em sua forma acabada, desenvolvido por meio de algoritmos imediatos e mecânicos, na qual os conceitos matemáticos são reduzidos a um mero aspecto simbólico, em que o raciocínio proporcional é entendido como um algoritmo de ordem e não como forma de pensamento.

Essa maneira de organizar o pensamento tornou-se um obstáculo no processo de apropriação do conceito de proporcionalidade por meio da comparação entre grandezas e unidades de medidas. Pois, para desenvolver o raciocínio proporcional exige-se do aluno que estabeleça as relações entre as grandezas, isto é, relação de ampliação (multiplicidade) e relação de redução (divisibilidade), sendo que esse método não se objetiva no sensório compreensível, esse é apenas o ponto de partida, que em um processo de análise busca chegar à síntese da multiplicidade e divisibilidade, que consideramos serem os conceitos fundamentais para elaboração do conceito de proporcionalidade.

Tais conceitos abordados tornam-se abstratos para os alunos, devido à defasagem de conceitos básicos estudados em anos anteriores, que muitas vezes são apresentados sem teor teórico. Como é o caso do conceito de multiplicação e divisão, que são abordados desde as séries iniciais, porém ancorados por uma metodologia pragmática. Desse modo, as dificuldades apresentadas pelos alunos estão centralizadas nesses conceitos, ou seja, em operar e relacioná-los com as relações de proporcionalidade.

# 5 REFERÊNCIA

AMORIM, M. P. **Apropriação de Significações do Conceito de Números Racionais: Um enfoque Histórico-Cultural.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade do Extremo Sul Catarinense, 2007.

ANDRINI, Á. VASCONCELOS, M. J. **Novo Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

COSTA JÚNIOR, J. R; FARIA, P. C. **Um estudo sobre as compreensões de professores de matemática acerca do conceito de proporcionalidade.** In: II Encontro Regional de Educação Matemática, 2009, Natal - RN. II EREM - Múltiplos olhares sobre o ensino e a pesquisa em educação matemática. Natal - RN: SBEM-RN (<http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/comunica.html>), 2009.

CRICIÚMA. **Proposta Curricular de Criciúma.** Criciúma/SC. 2008, p. 168-172.

DAMAZIO, A. **Elaboração de Conceitos Matemáticos: Abordagem Histórico-Cultural.** In: 29a Reunião Anual - Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2006, Caxambu. Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. Caxambu: Apênd. 2006. p. 1-19.

DAMAZIO, A. ***O* desenvolvimento de conceitos matemáticos no contexto do processo extrativo do carvão.** Florianópolis: UFSC, 2000. Tese de Doutorado.

DANTE, Luiz Roberto**. Tudo é matemática**. São Paulo: Ática, 2009.

DAVIDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental.** Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso, 1988.

\_\_\_\_\_\_\_\_. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3ª. ed. Habana:

Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DIAS, M. S; MORETTI, V. D. **Números e operações: elementos lógico-históricos para atividade de ensino.** Curitiba: IBPEX, 2011. 187p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: UNICAMP, 2004. 843 p.

FACCI, M. G. D. **Valorização ou Esvaziamento do Trabalho do Professor?** Um Estudo crítico-comparativo da teoria do professor reflexivo, do construtivismo e da psicologia vygotskiana. Campinas SP: Autores Associados, 2004, p.292.

FIOREZE, L. A.; [BARONE, D.](http://lattes.cnpq.br/8385283959153698); [BASSO, M.](http://lattes.cnpq.br/5478310789654878) **Objetos de Aprendizagem e Proporcionalidade: Uma Análise da Construção dos Conceitos a partir da Teoria dos Campos Conceituais.** In: Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2008, Rio Claro. XII EBRAPEM. Rio Claro, 2008. Disponível em: <<http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/234-1-A-t6_Fioreze_ta.pdf>>. Acesso em: 01 jul. 2012.

[GIARDINETTO, J.R.B.. **O fenômeno da supervalorização do saber cotidiano em algumas pesquisas da educação matemática**. São Carlos: UFSCar, 1997, Tese (Doutorado), Universidade Federal de São Carlos](http://wwwp.fc.unesp.br/~jrbgiar/tesedrjrbgiar.pdf).

GIOVANNI JR, J. R; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**. 7ºed. São Paulo, 2009.

GUELLI. O. **Contando a História da Matemática: 6 Dando corda na trigonometria.** São Paulo: editora ática, 1993.

IMENES, L. I; LELLIS, M. **Livro didático, Proporcionalidade: uma Crítica da Crítica.** Bolema, Rio Claro, ano 18, n. 24, p.1-30, 2005).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_. **Matemática.** São Paulo: Scipione, 1997.

JOENK, I. K. **Uma introdução ao pensamento de Vygotsky.** Caminhos (Rio do Sul), Rio do Sul/SC, v. 1, n. 1, p. 107-118, 2005.Acesso em: 01 de jul. 2012.

LIBÂNEO, J. C; FREITAS, R. A. M. DA M. **Vygotsky, Leontiev, Davydov Três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática.** In: IV Congresso Brasileiro de História da Educação, 2006. IV Congresso Brasileiro de História da Educação. Goiânia - GO: Editora Vieira/UCG, 2006. v. 1. p. 1-10. Disponível em: <<http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe4/individuais-coautorais/eixo03/Jose%20Carlos%20Libaneo%20e%20Raquel%20A.%20M.%20da%20M.%20Freitas%20-%20Texto.pdf>>. Acesso em: 01jul.2012.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança.** 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MADEIRA, S. C. “**Prática” no ensino de matemática: uma leitura com base na objetivação das proposições davydovianas para o conceito de multiplicação.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade do Extremo Sul Catarinense, 2012.

MAIA, T. C.; PORTELA, G; SILVA, M. P.; TINOCO, L. **Proporcionalidade e Pensamento Algébrico Como e Por que integrar?** In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife, PE. Proporcionalidade e Pensamento algébrico Como e Por que integrar? 2011.

MARTINS, L. de C. **Abstração reflexionam-te e aprendizagem de proporção: ensino de matemática na 6.ª série.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, *Orientador:*Fernando Becker.

Disponível em:

<<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/13743/000618281.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 01 jul.2012.

MIRANDA, M. R. **Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações.** 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <<http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/marcia_regiane_miranda.pdf>>. Acesso em: 01 jul. 2012.

NÚÑES, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin:** A formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009, p.216.

OLIVEIRA, I. ; SANTOS, M. C. **O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: uma análise das estratégias.** In: Apênd.- Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Educação, 2000, Caxambu. 23ª reunião anual da Apênd. 2000. Disponível em: <<http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/ensino_fundamental.pdf>>. Acesso em: 01 jul. 2012.

QUEIROZ, R. M. **Razão Áurea - A beleza de uma razão surpreendente**. 2008. Monografia. (Aperfeiçoamento/Especialização em Plano de Desenvolvimento Educacional) - Secretaria de Educação

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de sistema de significações numéricas**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, 2012.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_. **O desenvolvimento de conceitos na Proposta Curricular de Matemática do Estado de Santa Catarina e na Abordagem Histórico-Cultural: um estudo de relações.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Paraná, 2006.

RUGGIERO, M. A; BASSO, I. S. **A Matemática no Livro Didático**: Uma Reflexão na Perspectiva Histórico-Cultural. Bolema, Rio Claro, ano 16, n. 20, p.17-36, 2003.

SFORNI, M. S. de F. **Aprendizagem Conceitual e Organização do Ensino:** Contribuições da Teoria da Atividade. 1ª ed. Araraquara: JM Editora, 2004, p.200.

SILVA, E. A. **Pensamento Proporcional e Regra de Três: Estratégias utilizadas por alunos do Ensino Fundamental na Resolução de Problemas.** Curitiba: UTP/PR, 2008, Dissertação (Mestrado), Universidade Tuiuti do Paraná. Disponível em: <<http://tede.utp.br/tde_arquivos/1/TDE-2008-05-27T105844Z-147/Publico/EolaliaSilva.pdf>>. Acesso em: 01 jul. 2012.

SPINILLO, A. G. **Proporções nas séries iniciais do primeiro grau**. In: Schliemann; Carraher; A. Spinillo; L. Meira; J. Falcão; N. Acioly-Régnier (org). Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 40-61, 1997.

VIGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.**  Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

1. Erudito: Saber aprofundado um ramo do conhecimento; instrução, cultura vasta e variada. [↑](#footnote-ref-1)
2. Trataremos desse conceito na sessão 5, a seguir. [↑](#footnote-ref-2)
3. Dicionário Ilustrado: Apresenta-se no livro didático de Imenes e Lellis (1997) como um recurso para facilitar a linguagem contextualizada para melhor compreensão por parte dos alunos. [↑](#footnote-ref-3)