O QUE AS ESCOLAS NÃO ENSINAM

Um método de ensino deve mostrar apenas como fazer as coisas ou, também, o porquê das coisas serem feitas de tal ou qual maneira?
Seria responsabilidade do aluno buscar os porquês ou é suficiente ele decorar os *comos* do método de ensino e segui-los automaticamente, da mesma maneira que uma máquina poderia fazer?
Será que mostrar os *comos* e os porquês desses *comos* poderia melhorar o nível do ensino brasileiro? O custo seria proibitivo ou seria possível encaixar através da diminuição dos assuntos de cada matéria, principalmente Matemática?
Veja, por exemplo, o seguinte assunto de matemática.

Divisão

O professor chega na sala, monta a seguinte divisão na lousa e mostra <u>como</u> ele faz:

```
3 | 17    .
    ‾‾‾‾‾‾‾
        30 | 17    .
             ‾‾‾‾‾‾‾
             0,1764705
        130
          110
             80
             120
                100
```

O aluno aceita, decora e passa a utilizar sem questionar, principalmente porque todos fazem assim, os resultados conferem e a máquina de calcular confirma o resultado.
As expressões ensinadas para uma operação desse tipo são divisão ou distribuição, com ênfase para divisão.
Ora, divisão não tem um significado único. Você sente uma diferença quando se fala em dividir um bolo e dividir três laranjas.
Existe uma expressão bem mais clara para significar uma divisão matemática.
Se você tem a expressão A -:- B ou A/B ela deve ser lida assim: Quantas vezes acumular B para obter A?
Ou, melhor ainda: Quantas vezes B está dentro de A?

Por que “melhor ainda”? Porque essa é a melhor maneira de entender o que é divisão, não importando se o divisor é menor do que o dividendo ou maior. E mais: esclarece o <u>como</u> que o professor usou acima, pois, mostra o porquê desse como:

17/3 = ?

Para saber quantas vezes o 3 está dentro do 17, vá subtraindo 3 do 17 e conte quantas vezes você consegue fazer isso.
Você vai conseguir fazer isso 5 vezes e vai ter uma sobra de 2.
Então o 3 está 5 vezes dentro do 17 e sobram 2.
Assim, o resultado da divisão será: quociente 5 e resto 2.
O ideal é fazer a divisão completa, dividindo pelo divisor (3, no caso) cada resto que for diferente de zero.

3/17 = ?

Quantas vezes o 17 está dentro do 3? Não dá para calcular? Dá sim: Multiplique o dividendo (3) por 10 e tenha em mente que o resultado final vai estar multiplicado por 10. Ao chegar nele, divida-o por 10 para obter o resultado correto. Repita o processo para qualquer resto diferente de zero que aparecer:

(3 -:- 17 = 0, resto = 3)
30 -:- 17 = 1, resto = 13
130 -:- 17 = 7, resto = 11
110 -:- 17 = 6, resto = 8
80 -:- 17 = 4, resto = 12
120 -:- 17 = 7, resto = 1
10 -:- 17 = 0, resto = 10
100 -:- 17 = 5, resto = 15
... (paramos na sétima casa)

O resultado parcial de 3/17 = 01764705, que está multiplicado por 10, sendo o resultado final: 0,1764705.

Você diria: *Ok, a multiplicação do dividendo por 10 eu entendi, mas, não ficou claro a multiplicação dos restos por 10. Isso não afeta o resultado final?*
Ora, o ideal é fazer a divisão completamente ou parar após um certo número de casas decimais. Casas decimais vão sempre aparecer depois que você inicia a divisão do primeiro resto, pois, o resto sempre será menor do que o divisor.
A multiplicação de cada resto por 10 vai te permitir aplicar o processo “quantas vezes o divisor está dentro do dividendo” até o final da operação.

Fazendo cada divisão separadamente e, depois, somando os resultados, vai fazer você entender que a multiplicação dos restos por 10 não vai alterar o resultado, como, a princípio, parece. Você sabe que D = q*d + r. Você sabe também que 10*D = 10*q*d + 10*r, ou seja, se você multiplicar o dividendo por 10, toda a operação (incluindo o resto!) estará multiplicada por 10. Para obter o resultado final, divisões por 10 terão que ser feitas.

3 -:- 17 = 0, resto1 = 3
30 -:- 17 = 1, resto2 = 13

> O resto1, que agora é dividendo, está multiplicado por 10. Então o resultado é 0,1. E o resto2 está multiplicado por 10.

130 -:- 17 = 7, resto3 = 11

> Ao multiplicar o resto2 por 10 aqui, você o está multiplicando, efetivamente, por 100 (10 antes vezes 10 agora). Então, o resultado é 0,07. O resto3 vai estar multiplicado por 100.

110 -:- 17 = 6, resto4 = 8

> resto3*1000; resultado = 0,006
> Vezes 1000 porque 10 vezes o resto1 fez 10 vezes o resto2 e 10 vezes o resto3.
> Em seguida, 10 vezes o resto2, faz ele ficar 100 vezes maior, fazendo resto3 ficar 100 vezes maior também.
> 10 vezes o resto3 aqui, faz ele ficar 1000 vezes maior, o que faz os restos vindouros ficarem 1000 vezes maiores também. E, assim por diante.

80 -:- 17 = 4, resto5 = 12

> resto4*10000; resultado = 0,0004

120 -:- 17 = 7, resto6 = 1

> resto5*100000; resultado = 0,00001

10 -:- 17 = 0, resto7 = 10

> resto6*1000000; resultado = 0,0

100 -:- 17 = 5, resto8 = 15

> resto7*10000000; resultado = 0,0000005

Para obter o resultado final, basta adicionar os resultados:

0,1000000
0,0700000
0,0060000 +
0,0004000
0,0000100
0,0
<u>0,0000005</u>
0,1764105

Bom, com certeza é melhor usar um como do que tentar resolver as coisas pelo porquê delas, né? De qualquer maneira, sabendo o porquê das coisas, você, talvez, não precise utilizar o como que alguém criou, desde você consiga criar um como mais simples ainda.

Do que foi visto acima, você pode concluir que a divisão sumariza uma subtração, assim como a multiplicação sumariza a soma.
Saiba que existe uma diferença entre cada um desses pares de operação. Por exemplo: 5 + 5 significa acumular 5 unidades com outras 5 unidades, resultando em 10 unidades. Porém, em 2 x 5, o 2 não são 2 unidades. Ele é um multiplicador que diz: acumule o 5 duas vezes.
Essa distinção é importante para que você consiga manipular sinais corretamente. Por exemplo: -5 + 5 é diferente de -2 x 5 (a mesma coisa que 2 x -5). No primeiro caso você está removendo 5 do 5, que resulta em zero; já no segundo caso você está acumulando -5 duas vezes, que resulta em -10.
Isso é muito importante também para resolver equações em que você deve levar valores de um lado para o outro em relação ao sinal de igual: quando você transporta um valor negativo, ele vira positivo, e vice-versa; quando você transporta um multiplicador, ele vira divisor (e vice versa), mas, mantém o sinal que tinha do outro lado, pois, um multiplicador não é uma quantidade manipulável e, sim, uma quantidade que manipula.
Por exemplo:

5 = -2.a ==> 5/(-2) = a ==> a = -2.5

Ok, mas como (-2.a) é um número (considerando a multiplicação já efetuada), você pode fazer assim também:

5 = -2.a ==> 5 + 2.a = 0 ==> 2.a = -5 (o único valor que adicionado a 5 gera zero é -5) ==> a = (-5)/2 ==> a = -2.5.
Isso equivale a multiplicar os dois lados da equação inicial por -1 e trazer o multiplicador 2 (com sinal positivo) para dividir o -5.

Álgebra

Ah, a álgebra. Ao mesmo tempo que assusta, a palavra é usada por alguém para parecer importante e inteligente: *Tenho que estudar álgebra*. Todos em volta vão ficar admirados: *Ohhhhhhhhhh*!
Eu acho que, antes de ensinar os alunos a manipularem quantidades numéricas, o método de ensino deveria ensinar álgebra elementar.
Depois de ficar acostumado a concluir que 5 + 7 = 12, o aluno não consegue compreender a expressão a + b = x, pois, ele não consegue contar a, não consegue contar b e, assim, não consegue contar o total x. Em lugar nenhum ele encontra a prova de que adicionar a letra A com a letra B resulta na letra X.
No ensino escolar é colocado um abismo entre o método numérico e o método algébrico. A transição do primeiro para o segundo não é suave.
O que custa dizer que a + b = x representa 5 + 7 = 12 quanto 17 + 2 = 19, quanto 5 – 22 = -17 quando da transição numérico-algébrico?

Mais tarde, o professor joga o seguinte na lousa:

$$6a + b = 720$$
$$11a + b = 320$$

E resolve assim:

$$\begin{array}{l} -6a - b = -720 \\ \qquad\qquad + \\ \underline{11a + b = 320} \\ 5a = -400 \implies a = -80 \text{ e } b = 320 - 11(-80) = 1200 \end{array}$$

O aluno até entende a multiplicação da primeira equação por -1, mas, a adição das duas equações não pareceu muito clara, exatamente porque ele não está acostumado a operar com letras no lugar de números apenas.
Ora, se 5 + 7 = 12 e 17 + 2 = 19 e 12 + 19 = 31, então (5 + 7) + (17 + 2) = 31 ou (5 + 17) + (7 + 2) = 31. Se você concorda com essa armação da soma, você concordará com essa armação também:

$$\begin{array}{l} \ \ 5 + 7 = 12 \\ \qquad\qquad + \\ \underline{17 + 2 = 19} \\ 22 + 9 = 31 \end{array}$$

Da mesma maneira, se a + b = x e c + d = y, com certeza você vai concordar que

$$\begin{array}{l} a + b = x \\ \qquad\quad + \\ \underline{c + d = y \qquad\qquad} \\ (a+c) + (b+d) = x + y \end{array}$$

Então, se isso vale para números, também vale para símbolos (letras, no caso) que representem números. E, não importa se as letras acima representam números positivos ou negativos, ou frações ou qualquer outra operação que possa representar um valor. Tudo continua valendo.
A expressão 2x representa um valor. Aqui estamos misturando números com letras. Não tem problema, já que número é número e a letra representa um número. Assim, supondo que 2x = 10, também podemos escrever Ax = 10, onde substituímos 2 por A, para representar não só 2 (caso em que x vale 5), mas, também qualquer valor que satisfaça a equação. Por exemplo, se A =4, então x vai valer 2.5.

Potenciação

Potenciação é uma operação que representa um valor também. Como uma letra pode representar um valor, letras podem aparecer em operações de potência também, como em $Ax^2 + Bx$.
Nessa expressão, A e B são multiplicadores. Então, você não pode somar A com B, assim como não pode somar 2 com 3 em 2 x 5 + 3 x 4. Como x e x^2 também são multiplicadores, você não pode somar um com outro, mesmo que você tivesse Ax + Bx. Você aprendeu que a multiplicação tem precedência sobre a soma e sobre a subtração. Se você tiver A + B, você só poderá adicionar se conhecer os dois valores (substitui-los por números). Da mesma maneira, você não pode efetuar $x^2 + x$, pois, x^2 é uma multiplicação de x por x que, portanto, tem precedência sobre a soma. Você não pode somar 5^2 com 5 antes de resolver 5^2. Por outro lado, como a multiplicação sumariza a soma, você pode escrever x + x como 2x e $x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$.

A regra é, quando os símbolos forem os mesmos, você pode adicioná-los (os que tiverem sinal negativo serão automaticamente subtraídos).

Para Ax + Bx, você só poderá adicionar se conhecer A e B, como em 2x + 5x, que resulta em 7x. Veja que 2, 5 e x são multiplicadores, mas, x é um multiplicador comum para 2 e 5. Então, você poder fazer assim: 2x + 5x = x.(2+5) = 7x. Mais claramente: 2x + 5x = (x+x) + (x+x+x+x+x) = 7x.
Para $2x^2 + 5x$, você conseguiria, no máximo, esta expressão: x.(x+5). Mais claramente: $2x^2 + 5x = (x^2 + x^2) + (x+x+x+x+x) = (x.x+x.x) + (x+x+x+x+x)$.

Uma coisa que assusta à primeira vista: $4^0 = 1$. Pode ser qualquer outro número no lugar do 4. Pode ser até uma letra no lugar do 4! 1000^0 também é igual a 1; $x^0 = 1$.

A maneira usual de provar que qualquer número elevado a zero é igual a 1 é ensinando-se uma propriedade da operação de potenciação:

> *Na divisão de potências de mesma base, conserva-se a base e subtrai-se os expoentes.*

Matematicamente: X^a -:- X^b = X^{a-b}

Por exemplo: 5^5 -:- 5^3 = 5^{5-3} = 5^2 = 25. Isso é igual a 3125 -:- 125.

Porém, há uma outra maneira de mostrar que $4^0 = 1$ e, mostrando, ao mesmo tempo, que o resultado aumenta quando o expoente vai ficando cada vez mais positivo e diminui quando o expoente vai ficando cada vez mais negativo:

$$\frac{4.4.4.4}{4} = 4^3$$

$$\frac{4.4.4}{4} = 4^2$$

$$\frac{4.4}{4} = 4^1$$

$$\frac{4}{4} = 4^0$$

$$\frac{4/4}{4} = 4^{-1}$$

$$\frac{4/4/4}{4} = 4^{-2}$$

$$\frac{4/4/4/4}{4} = 4^{-3}$$

Substitua 4 por x, ou qualquer outro símbolo algébrico, e continuará valendo. Por exemplo:

$$\frac{x}{x} = x^0 = 1$$

Outra coisa que o professor deve cuidar também é o uso da linguagem comum na matemática. Já vi aluno confundir dobro com dobra, pois, essas duas palavras derivam do mesmo verbo na língua portuguesa: dobrar.
Dobrar uma folha de papel, um tecido, é fácil. Agora, dobrar o número 2 vai ficar muito esquisito. Mesmo *dobrar a quantidade 2* não soa bem.
Todas as linguagens têm suas falhas, mas, comparando esse caso acima entre a língua portuguesa e a língua inglesa, se você pedir para uma criança inglesa *to fold a sheet of paper*, ela vai te dar uma folha de papel dobrada ao meio; se você pedir para ela *to double a sheet of paper*, ela vai te entregar duas folhas de papel.
A questão é: a língua portuguesa não tem um verbo que signifique multiplicar uma quantidade por 2, que equivaleria a what’s the *double* of one?, por exemplo.

Métodos e Métodos

Por que o Brasil vai tão mal na Escola?

- Porque não se pode ensinar pessoas. Ensina-se máquinas e animais, não pessoas. Pessoas aprendem.
- Porque os professores ficam engessados pelos tais métodos de ensino. O método tem que ser do professor, não da Escola. O método tem que ser livre.

O que seria um método livre?
Imagine uma Escola com 10 salas de aula, 10 professores e capacidade para 20 alunos por sala. Imagine que o currículo é composto de 6 matérias. Os 10 professores são versados nas 6 matérias. Cada professor prepara uma prova de cada matéria usando a sua própria maneira de entender aquela matéria.
Todos os possíveis 200 alunos farão as provas, sendo 60 provas para cada aluno (6 de cada professor).
Alunos serão alocados a professor de acordo com a nota na prova de cada professor.
A tendência é que alunos com maior consonância com um professor (aluno e professor falam a mesma linguagem) vão tirar nota alta nas provas daquele professor.

Ok, há a chance (pequena) de todos os alunos serem alocados para um único professor. Para fazer a alocação, basta fazer uma classificação das provas por professor e nota (da maior para a menor) e fazer cortes de 20 em 20, alocando cada 20 alunos para cada professor.

Isso se aproxima muito do que seria ótimo, mas, de custo proibitivo: um professor para cada aluno, em que professor e aluno se "casam" muito bem, em termos de um compreender o outro.
O papel de um professor é o de compreender como o aluno pensa e, então, orientá-lo, para que ele APRENDA.
Quanto maior for a facilidade com que aluno e professor se compreendam, melhor.

Essa compreensão, um do outro, dependerá, como dito antes, da linguagem utilizada pelo professor.
Essa não é uma linguagem universal: *cinco mais sete são doze*; nem essa: *5 mais 7 é igual a 12*. Essa é uma linguagem universal: 5 + 7 = 12.
Então, a linguagem universal é a linguagem do *como*, que todo mundo entende.
Porém, para cada um, individualmente, entender pela primeira vez, a linguagem que tem que ser utilizada é a linguagem não universal, a linguagem do *porquê*.
Para explicar que cinco mais sete são dez, as palavras têm que ser bem escolhidas: <u>juntar</u> explicar melhor do que *somar* ou *adicionar*. Estas duas últimas palavras estão mais próximas da linguagem universal do que a primeira.

Juntar e contar fica melhor ainda: partindo de 5, junte 7 e continue contando: seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze.
Mas, e partindo de 5 juntando 10.000 (dez mil)? Gastar-se-ia uma vida inteira tentando-se fazer contas assim, mas, para aprender basta um exemplo como o anterior, com valores pequenos. O conceito é o mesmo para valores maiores.

Mas, ainda assim, a dificuldade para operar com valores grandes permanece. Aí é que entra uma coisa que deveria ser ensinada, mas não é, nem mesmo na maioria das linhas de ensino que levam ao final do ensino superior: bases numéricas.
Uma base numérica é um conjunto cujos elementos são caracteres atômicos, no sentido de que cada um é único, ocupa uma única posição, como cada letra deste texto aqui. Não é possível representar cada elemento de uma outra maneira, em termos de significado, pois, na verdade, é o significado que importa:

> Dois pode ser representado por ●●, por II, por 2, etc, mas, continua sendo a quantidade dois. Preferimos o caracter 2 porque é o que mais nos parece único.

A quantidade de caracteres no conjunto nomeia a base numérica. A base numérica mais conhecida, por ser a mais ensinada, é a base decimal. Chama-se decimal porque seu conjunto tem dez elementos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cada um representando (significando) uma quantidade: Nenhuma, uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.
A quantidade que chamamos de dez (e as maiores) não faz parte do conjunto. Ela é, simplesmente, um ajuntamento (soma, adição) de elementos do conjunto. É óbvio que elementos do conjunto podem resultar, também, de uma soma de outros elementos do conjunto, porém, o valor resultando só vai pertencer ao conjunto se ele ocupar apenas uma posição, ou ter um significado quantitativo menor do que a base.

Dada uma base B com n elementos (ou dígitos – dígito é palavra escolhida para nomear cada elemento de uma base. Dígito é uma palavra mais moderna para a palavra algarismo, que era muito usada no passado), podemos denotar essa base assim:

$$B_n = \{d_0, d_1, d_2, d_3, ..., d_{n-1}\}$$

O significado de cada dígito é:

$d_0 = 0$
$d_1 = 1$
$d_2 = 2$
$d_3 = 3$
d_{n-1} = valor da base menos 1.

Por exemplo: B5 = {0, 1, 2, 3, 4}.

Seja D um dígito qualquer desse conjunto. Formamos um número nessa base da seguinte maneira:

$$D_pD_{p-1}...D_3D_2D_1D_0$$

O índice **p** denota a posição (ou coluna) que o dígito **D** ocupa no número. A posição é marcada sempre da direita para a esquerda (da posição menos significativa para a posição mais significativa, em termos do valor relativo do dígito ali), começando com a posição **zero** e indo até a posição **p**, que é igual à quantidade de dígitos no número menos 1.
Para o número formado ter um valor diferente de zero, pelos menos um dos dígitos formadores tem que ter significado diferente de zero.
Por exemplo, o número 19531028, na base 10 (temos que informar a base, pois, este número é válido também em qualquer base maior que 10) é formado da seguinte maneira:

Dígito	1	9	5	3	1	0	2	8
Posição	7	6	5	4	3	2	1	0

Nós podemos afirmar que, dada uma posição **P** qualquer, o valor relativo que um dado dígito **D** representa ali naquela posição **P** é dado por $\mathbf{V = B^P \times D}$, para qualquer base **B**.
Por exemplo, o valor relativo que o dígito 3 (significado ou valor absoluto = 3) representa no número 19531028 é 10^4 x 3 = 30000.

Então, para descobrir o valor de um número, basta multiplicar cada dígito pela base elevada à posição do dígito e somar todos os resultados.
Em notação *como* (usando a linguagem universal da matemática):

$$V = \sum_{p=0}^{n-1} D \times B^p$$

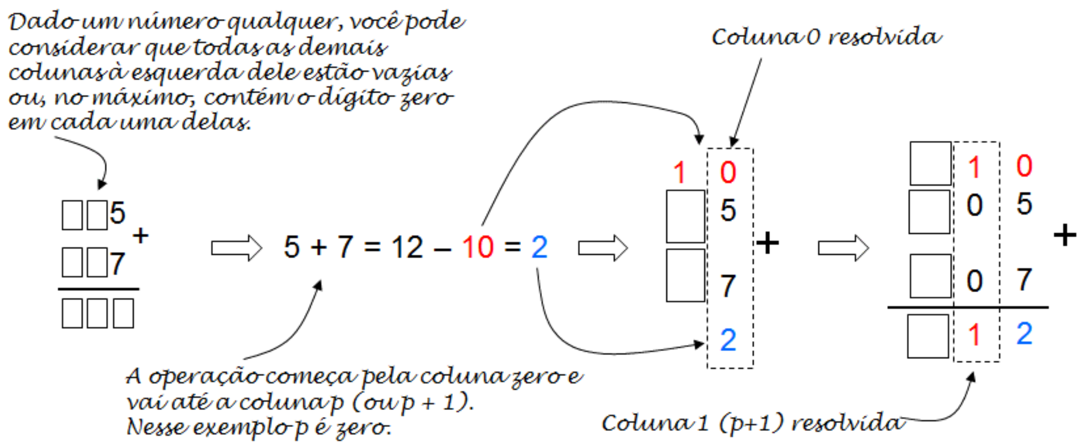
Esta fórmula nos diz para executar o processo a partir da direita para e esquerda do número, sequencialmente (o que dá na mesma de você escolher cada dígito aleatoriamente sem repetição e adicionar os resultados parciais).
Não vou falar aqui sobre operações entre bases diferentes (conversão), mas, esta fórmula serve para converter de qualquer base para a base 10 quando você utiliza o significado decimal de cada dígito. As demais operações você pode ver no artigo educacional O QUE É LINGUAGEM MATEMÁTICA.

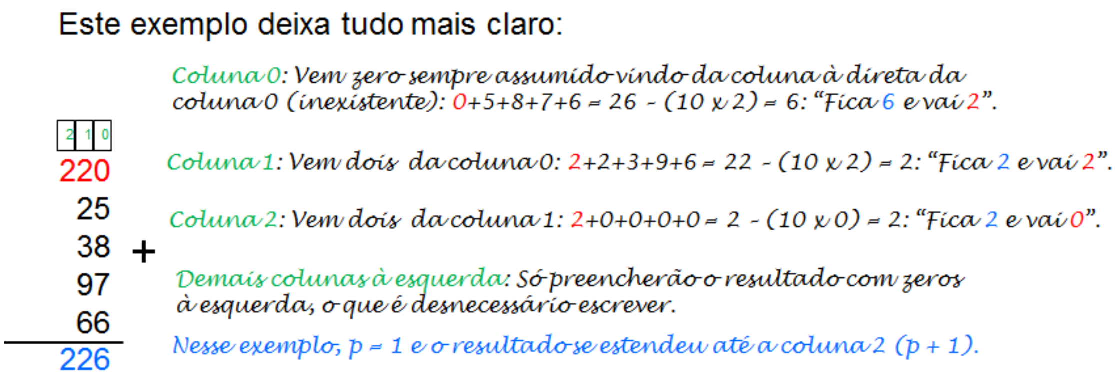
Agora você vai descobrir como isso vai te ajudar a juntar (somar, adicionar) quaisquer valores, independentemente de serem pequenos ou grandes, usando a base decimal.

Vamos efetuar 5 + 7 para ver como funciona.

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\;\; 7 \\ \hline 12 \end{array}$$

Nas escolas, ensinam assim: *cinco mais sete é igual a dois e vai um*.
Cinco mais sete NÃO É igual a 2 e sim igual a 12. Jogam isso sobre o aluno sem explicar o porquê, e isso é muito simples. Veja o passo-a-passo:





Explicação:

O resultado na coluna é igual à soma menos o valor da base multiplicado pela quantidade inteira de vezes que a base foi ultrapassada na soma, resultando num "vai quantidade" para a próxima coluna à esquerda.

A figura a seguir mostra como é feita a operação de **subtração**, deixando claro o porquê.

```
547 −
353
───
194
```

```
 4  14
~~5~~ ~~4~~ 7 −
 3  5  3
 ───────
 1  9  4
```

O professor vai fazer assim:
Coluna 0: 7 menos 3 é igual a 4.
Coluna 1: 4 menos 5 não dá para fazer, então tomamos 1 emprestado do 5 à esquerda (o 5 vira 4) e colocamos esse 1 à esquerda do 4, fazendo ele virar 14. Agora podemos continuar a subtração na coluna 1:
14 - 5 = 9.
Coluna2: 4 (que era 5 antes de emprestar 1 para o 4 da coluna 1) menos 3 é igual a 1.

A vantagem da subtração é que subtrações acumuladas nunca vão ultrapassar o valor absoluto da base, pois, você terá sempre que fazer a subtração entre duas parcelas e, depois, usar o resultado para operar com a terceira parcela (se houver), e assim por diante. A explicação para a subtração é:

Se o primeiro algarismo na coluna (chamado minuendo) for maior ou igual ao segundo algarismo na mesma coluna, linha de baixo (chamado subtraendo), o resultado será a subtração. Mas, se o minuendo for menor que o subtraendo, soma-se a base ao minuendo, efetua-se a subtração e vai 1 para a próxima posição à esquerda, onde ele será subtraído do minuendo que está ali.

A **multiplicação** funciona assim:

Se o produto for menor que a base, o <u>resultado</u> na coluna será o produto mais o transporte vindo da multiplicação anterior (para a coluna 0, considera-se que esse transporte é zero. Um transporte é a mesma coisa do “vai quantidade” visto acima). Se o produto for maior que a base, divide-se o produto pela base, deixando-se o resto como <u>resultado</u>, acrescido do transporte anterior (se este resultado ficar igual ou maior que a base, volte para o divide-se) e transportando o quociente para a próxima posição à esquerda acrescido do quociente obtido na possível volta ao divide-se. Como na adição e subtração, o processo deve ser repetido da direita para a esquerda enquanto existirem colunas a serem operadas. Veja um exemplo (7 x 547):

```
3340
 547
 x 7
────
3829
```

7×7=49÷10 = 4, resto=9+0=9, vai 4

7×4=28÷10 = 2, resto=8+4 = 12, transporte=0;
12÷10 = 1, resto=2+0=2, transporte=1+2=3

7×5=35÷10= 3, resto=5+3 = 8, transporte=3

7×0=0÷10= 0, resto=0 + 3 = 3, transporte=0

Parece bem mais complicado que o que o aluno aprende:

> *Sete vezes sete, 49, fica 9 e vai 4; sete vezes quatro, vinte e oito, mais 4, 32, fica 2 e vai 3; sete vezes cinco, 35, mais 3, 38* (como não tem mais colunas à esquerda fica o 38 e pára).

Mas, pelos menos, agora você conhece o “segredo”.

Já vimos como fazer **divisão**. É um dos primeiros assuntos deste trabalho:

> Subtrái-se o divisor (segunda parcela) do dividendo (primeira parcela) até que o dividendo fique menor que o divisor. O quociente será o número de vezes que a subtração foi feita e o resto será o resultado da última subtração.

Tudo isso que vimos vale para qualquer outra base:

> Binária: {0,1} ou base 2.
> Quinária: {0,1,2,3,4} ou base 5.
> Octal: {0,1,2,3,4,5,6,7} ou base 8.
> Hexadecimal: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F} ou base 16.

Você nota algumas coisas:

- Em termos de significado quantitativo, o nome da base é sempre igual ao maior elemento + 1. Isso se deve ao elemento zero, que também é contado para formar o nome da base.
- Qualquer base tem o elemento zero. Apesar do elemento zero não ter um significado de valor, ele é um multiplicador: cada zero acrescentado à direita de um outro dígito resulta na multiplicação desse dígito pelo valor da base. E você sabe que cada zero acrescentado logo após a vírgula de um número decimal faz esse número ficar dividido pelo valor da base. Pode-se dizer que o zero é elemento mais importante de uma base.
- A base é sempre ordenada (classificada) quantitativamente, de menor (zero) ao maior (base-1).
- Qualquer elemento da base tem um significado (um valor quantitativo) e, como vimos, qualquer “ajuntamento” deles, seja por soma ou por justaposição, pode formar um número. Se seguirmos com a ordenação da base em termos de valor (em termos numéricos), o primeiro valor após o elemento base-1 é, exatamente, e claro, o valor base-1+1 = base, e esse valor é sempre representado por 10, em qualquer base. Esta é a menor combinação possível cujo valor é imediatamente maior do que o valor do último elemento da base. Veja 10 pode ser chamado de “dez” na base 8, mas, seu valor nesta base não é dez, é oito!

- O caracter que forma cada elemento é único, como se pode ver na base 16, mas, sempre mantêm o significado quantitativo ordenado. Para a base 16, temos que:

Dígito	**Valor**
0	Nenhum
1	Um
2	Dois
3	Três
4	Quatro
5	Cinco
6	Seis
7	Sete
8	Oito
9	Nove
A	Dez
B	Onze
C	Doze
D	Treze
E	Quatorze
F	Quinze

- Uma coisa que você vai acabar notando também é que quanto maior for a base, menor será a quantidade de dígitos necessários para representar um dado valor. Isso já fica óbvio na base 16, onde o valor 13, por exemplo, ocupa apenas uma posição, enquanto esse mesmo valor ocupa duas posições na base 10 (e ocupa quatro posições na base 2!).

Só para encerrar, vamos adicionar dois números hexadecimal: BEBE + CAFÉ:

```
 11 11 0
   BEBE
   CAFE +
 -------
  189BC
```

Usando o valor de cada dígito:

14+14=28 -16x1 = 12 = C

1+11+15=27 – 16x1 = 11 = B

1+14+10=25 – 16x1 = 9

1+11+12=24 – 16x1 = 8

1+0+0=1 – 16x0 = 1

Para saber qual é o valor correspondente em decimal basta usar aquela fórmula do somatório.

Brasilio – Dezembro de 2014.