

Probabilidade e Estatística

Resultados Combinatórios
Independentes

Guilherme Gonçalves Marcelino de Oliveira

Matemática

INTRODUÇÃO

No campo da probabilidade e estatística, surgem eventos que extrapolando situações precisamos de um auxílio mais bem estruturado, como fórmulas e equações mais generalizadas, que nos ofereçam os resultados pretendidos, para então definirmos tais probabilidades, tais estatísticas.

Equações e fórmulas, assim como em toda a matemática pode ser deduzidas e explicadas através de meras observações e análises e no assunto deste trabalho, isto não é diferente.

Veremos logo no primeiro capítulo uma demonstração clara desta definição e este conceito se estende por todo o decorrer do trabalho.

Capítulo I - Resultados Combinatórios Independentes de Classe II

Embora esse nome soe como uma expressão completamente diferente, esta definição está o tempo todo presente na nossa concepção e percepção dos eventos estatísticos e probabilísticos, como dois dados combinando entre si, dois cronômetros combinando entre si, ou seja, qualquer combinação entre dois elementos que possam assumir valores simultâneos entre si.

Por exemplo: Em um lançamento de dois dados, onde ambos assumem valores de 1 a 6, quais são os resultados combinatórios possíveis.

Logo, com a sua concepção convencional destes eventos você se põe a trabalhar e a escrever, chegando aos seguintes resultados combinatórios:

1;1/1;2/1;3/1;4/1;5/1;6/

2;1/2;2/2;3/2;4/2;5/2;6/

3;1/3;2/3;3/3;4/3;5/3;6/

4;1/4;2/4;3/4;4/4;5/4;6/

5;1/5;2/5;3/5;4/5;5/5;6/

6;1/6;2/6;3/6;4/6;5/6;6/

Baseado em suas anotações (acima) você conclui (mesmo equivocadamente) que o número de resultados combinatórios possíveis é 36, ou seja, 6^2 , correto? Não! Se notarmos que (1,2) e (2,1), assim como (1,3) e (3,1) ou até mesmo (3,6) e (6,3) são equivalentes, ou melhor, é o mesmo resultado, podemos partir do princípio que se os dados, ou numa linguagem mais específica os nossos “fornecedores de resultados”, não possuem uma marcação ou uma determinação específica de sua ordem, ou

seja, tanto me faz em um dado, sair o número “1” e no outro o número “6”, ou vice-versa, eles são equivalentes!

É nesse ponto que introduzo a denominação “independente”, ou seja, a ordem de leitura dos resultados não influi em nada, para mim só interessa os resultados puramente obtidos, pois se um resultado já foi obtido, por exemplo, (2,4), eu automaticamente excluo resultados equivalentes a este, como é o caso de (4,2), visto que os dados são” INDEPENDENTES”, não obedecem a uma regra de leitura.

Com isso corretamente definido, podemos novamente explicitar nossos resultados, eliminando seus equivalentes.

1;1/1;2/1;3/1;4/1;5/1;6/

■/2;2/2;3/2;4/2;5/2;6/

■/■/3;3/3;4/3;5/3;6/

■/■/■/4;4/4;5/4;6/

■/■/■/■/5;5/5;6/

■/■/■/■/■/6;6/

Rapidamente concluímos que as combinações não eliminadas, são perfeitamente os nossos Resultados Combinatórios Independentes (R.C.I.).

Então em todo e qualquer lançamento de dois dados (ou quaisquer elementos que assumam simultaneamente valores de 1 a 6) o número de (R.C.I.) será sempre 21 combinações.

Mas e se existisse uma situação onde uma CLASSE 2 (ou seja, dois elementos que assumam valores infinitos, porém simultâneos, como é o caso dos dados, onde ambos assumem valores de 1 a 6, então os dois dados caracterizam uma CLASSE 2, por serem dois elementos que assumem

valores simultâneos e equivalentes entre si) voltando ao começo, suponha que exista uma situação onde uma CLASSE 2, onde os seus dois elementos (elementos no caso é igual aos dados) assumam valores de 1 a 10000, como procederíamos. Escrever os resultados se tornaria cansativo e desnecessário.

É aí que encontramos as Fórmulas e as Equações citadas na introdução deste artigo. Notem que no exemplo acima, os resultados combinatórios independentes, formaram uma espécie de triângulo.

/1,1/1,2/1,3/1,4/1,5/1,6/

/2,2/2,3/2,4/2,5/2,6/

/3,3/3,4/3,5/3,6/

/4,4/4,5/4,6/

/5,5/5,6/

/6,6/

Então se calcularmos a “Área deste triângulo obteremos uma fórmula generalizada”. Notemos também que na parte superior do triângulo temos seis valores e de “Altura” deste triângulo também temos seis, logo este triângulo é da ordem de 6x6. Porém se compararmos o presente triângulo com o triângulo formado pelas combinações excluídas notaremos que este é da ordem de 5x5, então nosso triângulo tem um valor a mais do que o triângulo excluído.

Da definição da área do triângulo temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Porém devemos adicionar (+6) a esta fórmula, devido à diferença entre os triângulos.

Agora nossa fórmula se manifesta por:

$$A = \frac{(b \cdot h) + n}{2}$$

Onde:

A, é a área do triângulo;

b; é a base do triângulo;

h, é a altura e **n**, é o valor máximo assumido pelos elementos da classe, no caso dos dados n=6.

Mas introduzindo esta definição em termos mais gerais obtemos:

$$\varphi = \frac{n^2 + n}{2}$$

Onde:

φ, é o número de resultados combinatórios independentes (R.C.I.);

n, é o numero máximo assumido (ou valor máximo) pelos elementos da classe.

Fazendo a prova temos:

$$\varphi = \frac{6^2+6}{2} \rightarrow 21$$

Os dados lançados nos oferecem 21 resultados combinatórios independentes.

Esta fórmula se estende a qualquer situação de CLASSE 2.

Por exemplo: Em uma CLASSE dois, se os seus elementos assumam valores de 1 a 32 obteremos:

$$\varphi = \frac{32^2+32}{2} \rightarrow 528$$

Com isso concluímos que os elementos da CLASSE 2 combinados entre si, nos fornecem 528 combinações (R.C.I.).

Este conceito nos presenteie com mais uma implicação, que é a probabilidade pura e autentica.

Se nos perguntarmos, se em uma CLASSE 2, eu tenho elementos que variam de 1 a 20, qual a probabilidade de o resultado combinatório independente (1,3) ser obtido?

Se os valores dos elementos variam de 1 a 20, logo (1,3) será possível, situação contrária seria esperar uma combinação (1,21), já que os elementos não assumem o valor 21. Retornando ao problema e utilizando a fórmula temos:

$$\varphi = \frac{20^2+20}{2} \rightarrow 210$$

Sabemos agora que na CLASSE 2, onde os elementos desta classe assumem valores de 1 a 20, obteremos 210 resultados combinatórios independentes, e sabemos também que a combinação (1,3) é um resultado dentre os 210, portanto se sempre que eu realizar este evento, sempre terei 210 (R.C.I.), então a probabilidade de eu conseguir (1,3) é 1 para 210, ou seja, 1/210, fazendo em porcentagem teremos 0,476% de obter (1,3).

Este modelo pode ser aplicado a várias áreas da ciência, onde se necessita obter resultados possíveis. Por exemplo, em FÍSICA.

Suponhamos que em um sistema físico, dois corpos sempre assumam valores simultâneos entre si, valores estes que são das suas respectivas energias cinéticas. As variações de energéticas são de 1 a 8J (J=joule). Reparem que o “0” é mensurável, então o “n” da equação deverá incluir o “0”, logo n será 9 e não 8, pois o zero é um valor possível de ser assumido.

Logo:

$$\varphi = \frac{9^2+9}{2} \rightarrow 45$$

Com toda a sua objetividade e simplicidade, adquirimos uma nova ferramenta matemática capaz de sintetizar números esmagadores em seus resultados podem se combinar de formas independentes entre si e nos dar seu valor possível real.

Capítulo II - Resultados Combinatórios Independentes de Classe III

Avançando um pouco mais nos estudos e progredindo, podemos descrever o comportamento dos resultados combinatórios independentes em uma esfera um pouco mais complexa, envolvendo expressões, definições e análises um pouco diferentes da que as convencionadas no capítulo anterior onde encontramos a CLASSE 2.

Então nessa etapa do aprendizado será preciso e necessário analisar e interpretarmos sob a ótica de conceitos e propriedades novas para então compreendermos e descrever a CLASSE 3, que é onde três elementos (assim como no caso dos dados no capítulo anterior) assumem valores simultaneamente equivalentes.

Imagine em um determinado evento, eu tenha três dados hipotéticos que assumam valores de 1 a 3, quais seriam meus resultados combinatórios independentes.

Se assim como se procedeu no capítulo anterior escrevermos as combinações, teremos a seguinte configuração:

1,1,1/1,1,2/1,1,3/1,2,1/1,3,1/1,2,2/1,2,3/1,3,3/1,3,2/

2,1,1/2,1,2/2,1,3/2,2,1/2,3,1/2,2,2/2,3/2,3,3/2,3,2/

3,1,1/3,1,2/3,1,3/3,2,1/3,3,1/3,2,2/3,2,3/3,3/3,3,3/3,2/

Assim também como no capítulo anterior devemos nos lembrar de que os resultados são independentes, ou melhor, os três elementos da classe são independentes, portanto a ordem de suas combinações é irrelevante, podendo ser então suprimidas por suas equivalentes. Logo a configuração final ficará:

1,1,1/1,1,2/1,1,3 [REDACTED] 1,2,2/1,2,3/1,3,3 [REDACTED]

[REDACTED] 2,2,2/2,2,3/2,3,3 [REDACTED]

[REDACTED] 3,3,3 [REDACTED]

Plotando os resultados de forma organizada temos:

111/112/113/122/123/133/

222/223/233/

333/

Note que também obtemos um triângulo, mais, porém não podemos encontrar o (R.C.I.) através do calculo generalizado de sua área visto que ela é irregular e inconstante.

Mas se observarmos este triângulo, notaremos que o número de combinações de primeira linha deste triângulo subtraída pelo número de combinações da segunda linha a diferença é (3), que é justamente o número máximo assumido pelos três elementos. Continuando temos que o número de combinações da segunda linha subtraído pelo número de combinações da primeira o resultado é (2). Com isso concluímos que se obedece a uma ordem.

Por exemplo, se em vez de três, tivéssemos uma CLASSE 3 com seus elementos variando de 1 a 4 as diferenças entre as linhas obedecerão a:

$$1^{\text{a}} \text{ linha} - 2^{\text{a}} \text{ linha} = 4$$

$$2^{\text{a}} \text{ linha} - 3^{\text{a}} \text{ linha} = 3$$

$$3^{\text{a}} \text{ linha} - 4^{\text{a}} \text{ linha} = 2$$

$$4^{\text{a}} \text{ linha} - \text{linha neutra} = 1$$

Então os resultados combinatórios independentes, de cada linha, se aumentam numa adição de (1, 2, 3, 4, 5, 6...), isto quer dizer que, como na última linha eu sempre terei um resultado, consequentemente a linha de cima terá $(1+2=3)$ e acima desta $(3+3=6)$ e a próxima $(6+4=10)$; $(10+5=15)$; $(15+6=21)$ e assim indefinidamente. Lembrando também que sempre se tem a linha neutra com o valor (zero), usada meramente para manter a integridade, coerência e equilíbrio matemático.

Após esta importante dedução, vamos analisar estas informações mais a fundo.

Se um evento de CLASSE 3, numa ordem3 (ordem significa que os três elementos da minha classe assumem o valor máximo 3; se fosse ordem 5, eles assumiriam simultaneamente o valor 5, e assim constantemente) possui 3 linhas mais a linha neutra, podemos fazer a seguinte analogia, sobre as definições anteriores.

Se o resultado, ou melhor, os números de resultados combinatórios independentes de cada linha se aumentam numa adição de (1, 2, 3, 4, 5, 6...), obteremos a seguinte conclusão:

Sabemos que a diferença entre a primeira e a segunda linha é (3), então procedemos:

Linha neutra (0) + (1) = (1) → 3ª linha

3ª linha (1) + (2) = (3) → 2ª linha

2ª linha (3) + (3) = (6) → 1ª linha

Se realizarmos as seguintes subtrações $(6 - 3) = (1ª\ linha - 2ª\ linha)$; $(3 - 1) = (2ª\ linha - 3ª\ linha)$; $(1 - 0) = (3ª\ linha - linha\ neutra)$, chegaremos à conclusão de que se obedeceu à adição (1, 2, 3...), portanto a implicação é verdadeira.

Mas não é isso o que queremos o que queremos é o número de resultados combinatórios independentes, desta situação. Ora se sabemos como é o comportamento das respectivas linhas, podemos inferir que o número de (R.C.I.) é justamente a soma dos números de combinações de cada linha, no caso observamos:

Número de (R.C.I.) = (1ª linha + 2ª linha + 3ª linha + linha neutra)

Número de (R.C.I.) = (6 + 3 + 1 + 0) = 10

Ou seja, em qualquer evento de CLASSE 3 e ORDEM 3, obteremos sempre dez resultados combinatórios independentes.

Mas isto ainda é um pouco incômodo, visto que assim como no capítulo anterior, para ordens relativamente grandes, este procedimento se mostra inconsistente.

É preciso e necessária uma fórmula geral, e justamente neste ponto que será necessário aquele discernimento e aquela aceitação pedida no início deste capítulo, pois para formular a equação geral deste conceito, foram introduzidas expressões novas para obtê-la, então é necessária a complacência, porém substancial este presente conceito.

Enfim, como para ordens de valores altos, o modelo anterior se tornou inconsistente, foi necessário a introdução de uma formula geral, que se segue:

$$\varphi = \sum_{i=0}^n (So)$$

Onde:

Φ , é o número de (R.C.I.);

$\sum$, é como sempre o símbolo de somatória que ira somar os valores de (So), que é um dos conceitos novos comentados a pouco e que será explanado melhor agora.

Vimos que os números de combinações de cada linha da ordem 3 se somou a (1, 2, 3...) e assumiram os valores (0, 1, 3, 6...) respectivamente, consequentemente a somatória destes valores nos forneceu o número de (R.C.I.). Se avançarmos um pouco mais, teremos que numa ordem 4, a 1ª linha, teria dez valores correto? Logo os valores de suas linhas ficariam (0, 1, 3, 6, 10), usando o somatório chegaríamos ao número (20), coerente não?

Então (So), cuja denominação é “Série da Ordem”, é a série pertencente a cada ordem, onde o número de valores desta série menos o zero (que é o termo neutro) é igual à ordem desta classe, no caso da ordem 3, sua série terá três valores (1, 3, 6), mais o termo neutro, ficando assim (0, 1, 3, 6), e esta série você pode reparar que ela obedece à regra fundamental da adição (1, 2, 3...), como antes definido. Logo inferimos que a Série da Ordem 4, tem quatro valores mais o zero. Ficando assim: (0, 1, 3, 6, 10); a Série de Ordem 5 (0, 1, 3, 6, 10,15), com isso a somatória dos termos das séries de suas respectivas ordens, são os resultados combinatórios independentes.

Os índices presentes em:

$$\sum_{i=0}^n (So)$$

Significam respectivamente:

n = significa que a soma vai até o termo “n”, ou seja, até o termo máximo da Série de Ordem (So);

i = 0, significa que o início da soma começa em zero (0).

Note a simplicidade desta fórmula em nos dar o resultado de um funcionamento triplo. Repare como ela é facilmente resolvida e que mesmo se usarmos números relativamente grandes, pode-se facilmente resolvê-los, eliminando aquele trabalho cansativo de escrever resultado por resultado.

Atente- se ainda à importância e fundamentalidade do novo termo introduzido (So), ele não apareceu para complicar e sim para descomplicar e tornar um sistema triplo cabível em uma série que consiste em pertencer simplesmente ao conjunto dos números mais simples possíveis, o conjunto dos números naturais (N), que até o nome de tal conjunto faz ressoar a sua naturalidade, autenticidade de logo se tornar trivial.

Não querendo me engrandecer, mas sim engrandecer a ciência como um todo, olha só como ela se mantém indiferente às complicações muitas vezes suscitadas por nós mesmos. Vejam como um funcionamento triplo variado pode ser delimitado e através disto ser estudado, por uma autêntica fórmula matemática:

$$\varphi = \sum_{i=0}^n (So)$$

Capítulo III – Propriedades

Propriedade I - Obtenção de (R.C.I.), através de um referencial matemático conhecido.

Analizando os cálculos, suas implicações e conceitos envolvidos na CLASSE 3, percebi que as expressões escondiam algo a mais. E este algo a mais era que uma nova interpretação de que seria possível encontrar o número de resultados combinatórios independentes de uma determinada Ordem x, mediante ou utilizando a adoção de uma Ordem y como referencial de ponto de partida da equação.

Ao concluir este pensamento, percebi a relevância deste conceito, pois em alguns casos, a obtenção das séries de ordem (So), de números relativamente grandes, se tornam demasiadamente cansativos e enfadonhos. Então de maneira a eliminar e minimizar o trabalho excessivo utilizei uma nova fórmula matemática, que de certa forma se assemelha com a fórmula anterior.

$$\varphi = \sum_{i=0}^n (So)$$

Porém inclui termos já conhecidos da matemática e outro relativamente novo e absolutamente simples.

Logo a fórmula final da Propriedade I, fica assim explicitada:

$$\varphi_x = \sum (C_{sx}^{sy} e + Sy)$$

Onde:

$\Phi_{x \rightarrow}$ é o número de resultados combinatórios independentes de uma determinada ordem x;

$\Sigma_{\rightarrow}$ continua sendo somatória;

C_{sx}^{sy} $\rightarrow$ é conhecido da matemática, que se chama “Complementar de Sy em relação a Sx” é basicamente o que falta para Sy chegar ou se igualar a Sx.

Exemplo:

$S_x = (0, 1, 3, 6, 10, 15)$

$S_y = (0, 1, 3, 6)$

Logo complementar de Sy em relação à Sx será:

$C_{sx}^{sy} = (10, 15);$

E o **e** da equação é um termo novo, chamado “estudo da diferença entre as ordens”, que é a diferença que vai nos fornecer as respectivas ordens.

Exemplo:

Se eu tenho uma expressão complementar: $C_{sx}^{sy} \mathbf{e}$, sendo que Ordem y = Ordem 3 e Ordem x = Ordem 5, o meu “e” da fórmula será analisado através de um “estudo da diferença entre as ordens”.

Sendo que: $\mathbf{e} = O_x - O_y \rightarrow 5 - 3 = 2$, então eu sei que a minha a minha Sy é a série de Ordem 3 (0, 1, 3, 6) e utilizando “e”, concluímos que a Sx =

Série de Ordem 5 , tem dois componentes a mais do que $S_y = S_3$, pois: $e = O_x - O_y \rightarrow 5-3 = 2$. Logo a minha série de ordem 5, será $S_3 + 2$ valores seguinte (respeitando a regra de adição 1, 2, 3, 4, 5), e assim ficando com 5 valores mais o termo neutro:

$S_x = S_5 = (0, 1, 3, 6, 10, 15)$, então a expressão: $\phi_x = \sum(C_{sx}^{sy}e + S_y)$, se torna perfeitamente aceitável e consistente.

Vamos agora rever um conceito em especial que é o de “Complementar (C)”, este termo introduzido na equação, faz com que tratamos as Séries (S_y e S_x) como conjuntos numéricos, visto que ele (o complementar) pertence à teoria dos conjuntos e quando utilizado deve-se tratar todas as suas vizinhanças na equação (no caso S_x e S_y) como conjuntos numéricos.

Entretanto, mesmo sendo tratados como conjuntos numéricos, isto não influi em absolutamente nada no resultado final.

Experimento Comprovativo

Em uma CLASSE 3, qual o número de (R.C.I.) de uma Ordem 10, partindo de um ponto de referência “Ordem 5”.

Utilizando a nossa nova expressão:

$$\phi_x = \sum(C_{sx}^{sy}e + S_y) \rightarrow \phi_{10} = \sum(C_{s_{10}}^{s_5}e + S_5) \rightarrow$$

Usando o “e” temos: $e = O_{10} - O_5 \rightarrow e = 10 - 5 = 5$.

Temos então que a Série de Ordem 10 terá 5 valores (ou melhor, componentes) a mais do que a Série de Ordem 5, respeitando a Regra fundamental de Adição (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...). Logo se a Série $y =$ Série 5 é conhecida (0, 1, 3, 6, 10, 15), consequentemente S_{10} será genericamente [0, 1, 3, 6, 10, 15, (15+6), (21+7), (28+8), (36+9), (45+10)].

Concluindo ficará: S10 (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55).

Agora nosso calculo pode ser facilmente determinado por:

$$\phi x = \sum(C_{sx}^{sy}e + Sy) \rightarrow \phi 10 = \sum(C_{s10}^{s5}e + S5) \rightarrow$$

$$\phi 10 = \sum[(21+28+36+45+55) + (0+1+3+6+10+15)] \rightarrow \phi 10 = 220.$$

Discussão:

- O resultado acima referido ($\phi 10 = 220$) poderia ser facilmente encontrado pela fórmula geral, mais estamos considerando que desconhecemos a Série de Ordem 10;
- Notem que esta expressão $\phi x = \sum(C_{sx}^{sy}e + Sy)$, nos oferece um método indireto, porém eficaz de se encontrar os números pertencentes à Série de x, partindo do ponto que a Série de y é um conjunto conhecido.
- Reparem também que os resultados são obtidos basicamente de uma associação de adição e subtração de conjuntos numéricos.

Propriedade II – *Obtenção do último valor da Série de Ordem x, mediante um referencial adotado.*

Verificando as fórmulas já estudadas, reparei que através delas e dos novos conceitos introduzidos como a ideia de complementar (C), a noção de “estudo das diferenças entre as ordens (e)”, notei que seria possível determinar o ultimo valor das Séries, mediante a adoção de um referencial matemático conhecido.

$$F(Sx) = (C_{sx}^{sy}e - C_{sx-1}^{sy}e) \rightarrow$$

Onde:

$F(Sx)$, não significa função de Sx , mais sim final de Sx , que é justamente o número final da Série de Ordem x ;

C_{sx}^{sy} é complementar de Sy em relação à Sx ;

e , é o “estudo da diferença entre as ordens” e;

C_{sx-1}^{sy} é simplesmente um termo introduzido para manter a integridade dos cálculos a fim de se obter o último termo de Sx . Por exemplo:

Se no complementar de Sy em relação à Sx , eu encontro uma série hipotética (10 15); logo no complementar de Sy em relação em relação à $Sx-1$ (que significa ser uma ordem inferior a Sx) eu vou encontrar uma série resultante (10), visto que Sy , não se alterou. Então fazendo a subtração: $C_{sx}^{sy}e - C_{sx-1}^{sy}e$ teremos: $(10, 15) - (10) = (15)$, ou seja, o ultimo componente de $F(SX) = (15)$.

Com isso encerramos temporariamente nossos estudos sobre Obtenção de Resultados Combinatórios Independentes (R.C.I.).

Passamos por um profundo mar de conceitos e de deduções e com eles muito bem definidos, atingimos e formulamos quatro equações inter-relacionadas.

$$\varphi = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\varphi = \sum_{i=0}^n (So)$$

$$\varphi_x = \sum (C_{sx}^{sy}e + Sy)$$

$$F(Sx) = (C_{sx}^{sy}e - C_{sx-1}^{sy}e)$$

Onde em momento algum deixaram de expor a sua simplicidade autenticidade, coerência e uma dose de inovação.

Se pararmos para pensar que um mundo onde tudo é estatístico, dinâmico e inquieto, estas fórmulas nos auxiliam e nos ajudam a deciframos, estudarmos e de certa forma descrevermos o funcionamento e comportamento dos fenômenos estatísticos e probabilísticos.

É lógico que a Classe1, Classe 2 e a Classe 3 são parte essencial de um conceito mais amplo da matemática e, portanto os estudos continuam... Com o intento de catalogar, decifrar e compreender classes maiores. Pode ser que eu mesmo as encontre, pode ser também que outros as encontrem.

Mais, contudo que a verdade sobre a compreensão deste e de outros fenômenos existentes permaneça sendo a maior das buscas almejadas por todos os cientistas ou simpatizantes, busca esta que me forçou a estudar,

interpretar, analisar, formular e explanar tais conceitos, descritos em três curtos capítulos.